ハンス　マースに捧げる

緒　言

1976 年春，インド，チャンディガル (Chandigarh) の数学高等研究センターにおいて，筆者はジーゲルモジュラー関数についての講義を行う機会を得た．この講義はS. ラル博士 (Dr. Sunder Lal) により講義録としてまとめられた．この本の第 I 章はこの講義録によるものである．

第 II 章の内容は，佐武コンパクト化に関するもので，1977 年に R. キール教授 (Prof. R. Kiehl) のもとで組織されたハイデルベルク，マンハイム両大学数学教室の共同研究プロジェクトのテーマとして選ばれたものである．

第 III 章は，内容的に非常に近づき難いものを含んでいると思われる．この章の内容の頂点といえるものは Y. タイ博士 (Dr. Y. Tai) の結果であり，これは n 次のジーゲルモジュラー関数体がほとんどの場合，一般型 (allgemeinem Typ) と呼ばれているものになるというものである．タイ氏によるこの定理の証明は，筆者のハーバード大学滞在中（1981 年）に D. マンフォード教授 (Prof. D. Mumford) を通して伝えられた．

最後の章はヘッケ作用素に関するもので，1980 年に A. アンドリアノフ教授 (Prof. A. Andrianov) がハイデルベルク大学に滞在し，それに触発され書かれたものである．

この本の執筆にあたり，同僚諸氏に感謝を捧げたい．R. エントレス氏 (R. Endres)，R. ヴァイスザウアー博士 (Dr. R. Weissauer) には，最初の原稿にあった多くの誤りを指摘して頂いた．最後に，判読困難な原稿を印刷用原稿に清書して頂いたフォン・シュティーレンベルク女史に感謝したい．

ハイデルベルク　1981 年　　　　E. フライターク (E. Freitag)

序　　文

一変数や多変数のモジュラー関数の理論は19世紀にその基礎が築かれた．それは**代数関数の積分理論**に密接に関連している．代数関数の積分理論のいくつかの点の重要性をはっきりと認識することは，この本ではそのような観点では扱われないが，その歴史的発展の理解にとって不可欠である．

代数関数は本質的には，リーマン球 $\overline{\mathbb{C}}$ 上では一意的には決定されない関数である．それは適当なコンパクトリーマン面 $\mathcal{R}$ 上で一意的に決定される．ここでコンパクトリーマン面とはリーマン球を有限葉に被覆するものである：

$$p : \mathcal{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}.$$

微分

$$\omega = f\,dp$$

は $\mathcal{R}$ 全体で正則であるとき，**第1種微分**と呼ばれる．第1種微分全体の集合 $\Omega(\mathcal{R})$ は，有限次元ベクトル空間をなし，その次元は $\mathcal{R}$ の位相的種数と一致する：

$$n \;=\; \dim \Omega(\mathcal{R}) \;=\; \mathcal{R}\,\text{の種数}.$$

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_n$$

を $\Omega(\mathcal{R})$ の一組の基底とし，a を $\mathcal{R}$ の定点とする．$\mathcal{R}$ の点 $x_1, \ldots, x_n$ に対して，複素数 n 個の組を割り当てることができる：

$$A(x) = (A_1(x), \ldots, A_n(x)),$$
$$A_j(x) = \int_a^{x_1} \omega_j + \cdots + \int_a^{x_n} \omega_j \qquad (1 \le j \le n).$$

もちろんここで，a から x_j $(1 \le j \le n)$ への経路が問題となる．この不確定さを除去するために，$\mathbb{C}^n$ を適当な部分群で割らなければならない．複素数の n 個組 $\mathfrak{z} = (z_1, \ldots, z_n)$ が基底 $\omega_1, \ldots, \omega_n$ に関する**リーマン面の周期**であるとは，ある閉曲線 α が存在して

$$z_j = \int_\alpha \omega_j \qquad (1 \le j \le n)$$

となることをいう．周期の全体の集合 L は $\mathbb{C}^n$ の部分群をなす．$A(x)$ の L を法とした値は，経路の取り方に依存しない．したがって，この対応の自然な行き先として剰余群 $\mathbb{C}^n/L$ がとれる．A の定義域についても同様の操作を試みる．値 $A(x)$ は明らかに点 $x_1, \ldots, x_n$ の順序にはよらない．

$\mathcal{R}$ の n 個のカルテシアン積

$$\mathcal{R}^n = \mathcal{R} \times \cdots \times \mathcal{R}$$

において二つの n 組を順序を除いて区別することにより n 次**対称冪** (n-te symmetrische Potenz)

$$\mathcal{R}^{(n)} = \mathcal{R}^n/\mathfrak{S}_n, \qquad \mathfrak{S}_n = n \text{ 次対称群}$$

が得られる．したがって A は写像

$$A : \mathcal{R}^{(n)} \longrightarrow \mathbb{C}^n/L$$

と解釈される．

代数関数の積分理論の基本的結果は次のように述べられる：

1) 群 L はランクが $2n$ の格子である．

2) **ヤコビの逆定理.**　写像

$$A : \mathcal{R}^{(n)} \longrightarrow \mathbb{C}^n/L$$

は全射かつ双有理型である．

3)　**リーマンの周期関係式.**　基底 $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ を適当に選ぶことにより，L の $\mathbb{Z}$-基底で次の形のものがとれる：

$$\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_n, \mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_n.$$

ここで

$$\mathfrak{n}_j = (0, \ldots, 0, \overset{j\text{ 番目}}{1}, 0, \ldots, 0).$$

ベクトル $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_n$ は，次を満たす行列 Z の行とみなせる：

a) Z は対称行列：　$Z = {}^tZ$.

b) Z の虚数部分は正定値.

周期行列 Z は基底の取り方に依存する．別の基底をとれば，別の周期行列 $\widetilde{Z}$ が得られる．しかしながら $\widetilde{Z}$ は Z から**シンプレクティックモジュラー変換**

$$\widetilde{Z} = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}$$

によって得られる．ここで A，B，C，D は n 次の整数行列で

$$A\,{}^tD - B\,{}^tC = E, \quad A\,{}^tB = B\,{}^tA, \quad C\,{}^tD = D\,{}^tC$$

となる性質を満たすものである．これらモジュラー変換の全体は一つの群 Γ_n をなし，それは n 次複素対称行列で正定値な虚数部分をもつもの全体のなす集合 $\mathbb{H}_n$ に作用する．

したがって，任意のコンパクトリーマン面（したがって任意の代数関数）に，商空間

$$\mathcal{A}_n := \mathbb{H}_n/\Gamma_n$$

上の 1 点を対応させることができる．リーマン面の双正則同値は $\mathcal{A}_n$ の同一の点を定義する．種数 n のコンパクトリーマン面の同値類の集合を $\mathcal{M}_n$ で表すことにすると，写像 $\mathcal{M}_n \to \mathcal{A}_n$ が得られる．

4) **トレリの定理 (Satz von Torelli).** 二つのコンパクトリーマン面のそれぞれの周期行列が，シンプレクティックモジュラー変換で移るものとする．するとそれらは双正則同値である．換言すれば，写像 $\mathcal{M}_n \to \mathcal{A}_n$ は単射である．

モジュラー関数 (Modulfunktion) の理論は**モジュラー代数関数**の探究の中から生まれてきた．おおまかに述べれば，モジュール（モドゥル：Modul）とは，与えられた代数関数 f に対して割り当てることができる，ある種の量のことであり，f に適当な変換を施しても変化しないようなものである．

例として挙げれば，関数

$$f(x) = \sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}$$

に対して，有名な不変量

$$j = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2}$$

は古典的なモジュールである．f に属するリーマン面 $\mathcal{R}$ はリーマン球を 2 重に覆い，種数が 1 で，この場合 $\mathcal{R}$ からトーラス

$$\mathbb{C}/L, \quad L = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}z, \quad \mathrm{Im}z > 0$$

への同型 A が定義される．不変量 j は z に依存して決まり，上半平面上の正則関数で（楕円）モジュラー群 Γ_1 の変換のもとで不変である．さらにこれは一つの双射を定義する：

$$\mathcal{M}_1 \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_1 = \mathbb{H}_1/\Gamma_1 \overset{j}{\xrightarrow{\sim}} \mathbb{C}.$$

一般的にモジュールとは，ある適当な付加条件のもとで，$\mathcal{M}_n$ 上の関数の値のことである．多変数の関数論を展開する流れに沿えば，この付加条件は関数が有理型であるという条件で定式化される．空間 $\mathcal{A}_n = \mathbb{H}_n/\Gamma_n$ は $\frac{1}{2}n(n+1)$ 次元の解析空間の構造をもち，$n \geq 2$ のとき $\mathcal{M}_n$ は $3n-3$ 次元の解析空間の構造をもつ．$\mathbb{H}_n/\Gamma_n$ 上の有理型関数は，$\mathbb{H}_n$ 上の（有理型）関数で Γ-不変な関数と同一視され，これを $\mathcal{M}_n$ に制限することによりモジュールが得られる．これらのモジュラー関数の理論は，1939 年に C.L. ジーゲルによって初めて体系的に展開された．しかしながら，そのような関数の例は既に 19 世紀に詳細に調べられていた．このようなモジュラー関数は，写像 A の代わりに，**有理型逆写像**

$$A^{-1} : \mathbb{C}^n/L \longrightarrow \mathcal{R}^{(n)}$$

を考えることにより現れてくる．射影 $p : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{C}}$ は正則写像

$$p^{(n)} : \mathcal{R}^{(n)} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}^{(n)}$$

を誘導する．リーマン球の対称冪 $\overline{\mathbb{C}}^{(n)}$ は基本対称式の定理より，カルテシアン積 $\overline{\mathbb{C}}^n$ と双有理同値である．

したがって逆写像 A^{-1} は，トーラス $\mathbb{C}^n/L$ 上の有理型関数の n 組によって記述される．また，$\mathbb{C}^n/L$ 上の有理型関数は $\mathbb{C}^n$ 上の有理型周期関数と同一視される．そのような関数は**アーベル関数**と呼ばれる（代数関数の積分は**アーベル積分**と呼ばれる）．周期行列 $Z \in \mathbb{H}_n$（あるコンパクトリーマン面に属するかどうかは問わない）に対するアーベル関数全体は代数関数体をなす．**テータ関数**の理論により，この体について**標準的生成系**

$$f_1(Z, \mathfrak{z}), \ldots, f_\ell(Z, \mathfrak{z})$$

を与えることができる．これらの関数は Z に関して解析的である．その**零値**

$$f_1(Z, 0), \ldots, f_\ell(Z, 0)$$

はモジュラー関数であることが証明される．詳しく述べれば，関数 $f_j(Z, 0)$ はモジュラー群 $Sp(n, \mathbb{Z})$ の適当な有限指数の部分群の変換のもとで不変である．適当な対称多項式を考えることにより，全モジュラー群に対するモジュラー関数が得られる．モジュラーアーベル関数に対する古典的な基礎となるのは**テータ零値**である．

モジュラー関数の理論を展開していくうえで，もう一つの動機となるものが，代数的整数論の問題の中にある．値 $j(z)$ はよく知られているように，z が虚 2 次体 K

の元であるならば代数的である．K のアーベル拡大はモジュラー関数の特殊値を添加することにより得られる．これは $\mathbb{Q}$ の場合，**クロネッカーの定理**として知られているように，アーベル拡大が 1 のべき根，すなわち指数関数 e^x の特殊値を添加して得られることの拡張である．基礎体の大きなクラスに対して，そのような関数を見いだすために，**D. ヒルベルト** (D. Hilbert) は，彼の名前でよく知られたモジュラー関数を導入した．これは上半平面のいくつかの積のうえで定義されるものである．このモジュラー関数は，**O. ブルメンタール** (O. Blumenthal) によって体系的に研究された．その後 **H. マース** (H. Maaß) は，このヒルベルトモジュラー関数の理論に新しい基礎を築いた．それは，その間に展開されていたジーゲルの方法に基づくものであった．

モジュラー関数への 3 番目の道は，2 次形式とくに正定値 2 次形式の理論に通じている．この理論の中で興味深いものに **2 次形式の表現数**に関するものがある．例として挙げられるのは，ある数 n を k 個の平方数の和に分解するときの個数

$$A_k(n) = \sharp\{\, g \in \mathbb{Z}^k \mid g_1^2 + \cdots + g_k^2 = n \,\}$$

についてのものである．明らかに

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_k(n) e^{\pi i n z} = \vartheta(z)^k$$

と書き表すことができる．ここで $\vartheta(z)$ は

$$\vartheta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 z}$$

で定義されるもっとも単純なテータ級数の一つである．モジュラー関数の理論は，このような表現数の研究に対して，非常に優れた補助手段となる．

1935 年に **C.L. ジーゲル** (C.L. Siegel) によって公表された，彼の有名な**主定理**は，2 次形式 $T = T^{(n)}$ を正定値 2 次形式 $S = S^{(m)}$ によって表現すること，すなわち

$${}^tGSG = T, \qquad G = G^{(m,n)}：\text{整行列}$$

に関して研究したものである．

この主定理は，ある制限のもとで，テータ級数の 1 次結合と一般化されたアイゼンシュタイン級数の間に等式が成立することを示している．この等式により，ジーゲルはシンプレクティックモジュラー群に対するモジュラー関数やモジュラー形式を関数論的方法によって研究する方向に向かっていった．

この本では，このジーゲルが基礎を作り，その後発展した理論への導入を記述していく．

内容の概観

最初の章では，**ジーゲルモジュラー形式とモジュラー関数**に対する基本的な**存在定理**，**有限性定理**が証明される．ここではモジュラー関数全体のなす体が有限生成であり，超越次数

$$\frac{n(n+1)}{2} \ \left(= \dim \mathbb{H}_n/\mathit{\Gamma}_n\ \right)$$

をもつことが示される．

この部分は初歩的であり，ここで完結している．この部分の内容は中期ゼメスターの学生にも受け入れられるであろう．

第2の章では，佐武とベイリーのコンパクト化理論が扱われる．この理論からの主結果の一つは**モジュラー形式のなす環の有限生成性**の証明である．これはモジュラー関数の体の有限生成性より一般的であり，深い結果である．モジュラー形式のなす環の有限生成性を，ジーゲルの方法やそれより比較的初歩的な方法で証明することは，今もってできていない．

コンパクト化の理論には，現代的な多変数の関数の理論が用いられる．これを理解するには，解析空間の理論と代数幾何学の基本的な結果を熟知している必要がある．

3番目の章では，モジュラー関数の体を $n = 1, 2$ の場合は初歩的な方法で，$n > 2$ の場合は代数幾何学の方法を用いて調べていく．これは孤立した研究目標ではない．ともかくも，モジュラー関数体は $n = 1, 2$ のときは確かに有理関数体となるが，一般にはそうでないことが示される．そのような構造定理に興味をもつ理由は何であろうか？　基本は代数多様体（関数体）の分類理論に対して $\mathcal{A}_n$，さらに $\mathcal{M}_n$ の構造が大きな意味をもつというところにある．根底には，d 次元既約多様体 X を次の方法で研究するということがある．

有理写像

$$\varphi : X \longrightarrow P^{d-1}\mathbb{C}, \quad d = \dim X > 1$$

をとる．ここで φ のファイバーは，ある疎な例外集合 $S \subset P^{d-1}\mathbb{C}$ を除いて，定まった種数 n をもつコンパクトリーマン面である．$P^{d-1}\mathbb{C} \backslash S$ の各点に対して，このリーマン面の周期行列を対応させることにより，有理型写像

$$P^{d-1}\mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{A}_n = \mathbb{H}_n/\Gamma_n$$

が得られる．$\mathcal{A}_n$ またはモジュラー関数体が “有理的かどうか” は代数幾何学における 豊富性 に依存する．この本の結果は，小さな n について 強豊富性 が現れていることを示している．

4 番目の章はヘッケ作用素の理論への入門である．この章は再び初等的になり証明は完結している．この章の内容は第 2，第 3 の章のものとは，ほとんど独立している．この理論の応用として，純粋に関数論的な方向から，ジーゲルの主定理の特別な場合が得られる．したがって，この本はジーゲルが始めた地点で終了するわけである．

この本により，学生がモジュラー関数の理論に興味をもち，そのことが現在研究されている課題への導きとなることを希望する．この本では，内容の完結性という要求には明らかに答えていない．モジュラー関数の理論の進歩は急速で，$n = 1$ のときでさえ，完結したものを求めることが困難なことは明白である．

さらに本質的な不備について言及したい．序文で強調したアーベル関数との関連については，本論では触れていない．アーベル関数に関する優れた本として井草 [44] がある．

頻出の記号のリスト

$\square$:　証明の終わり.

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$：　自然数，整数，有理数，実数，複素数全体の集合.

$A = A^{(m,n)}$：　A は m 行，n 列の行列.

$A^{(n)} = A^{(n,n)}$.

${}^t\!A$：　行列 A の転置行列.

$\sigma(A)$：　正方行列 A のトレース.

$\det A$：　正方行列 A の行列式（ときには，$|A| := \det A$ とも書かれる）.

$Y \geq 0\,(Y > 0)$：　Y は実対称行列．対応する 2 次形式が半正定値（正定値）.

同様の記号はエルミート行列に対しても使われる.

$Y[A] = {}^t\!AYA$，$Y\{A\} = {}^t\overline{A}YA$;

2 番目のものは，次のテータキャラクタリスティックへのモジュラー変換の作用と区別されるべきである（I 章，§3）：

$$\begin{pmatrix} \widetilde{a} \\ \widetilde{b} \end{pmatrix} = M \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} :\equiv \begin{pmatrix} D & -C \\ -B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (C\,{}^tD)_0 \\ (A\,{}^tB)_0 \end{pmatrix} \pmod 2$$

$M_{m,n}(R)$：R に係数をもつ $m \times n$ 行列全体の集合.

$\mathcal{X}_{m,n} = M_{m,n}(\mathbb{R})$.

$GL(n,R)$：R に係数をもつ n 次可逆行列のなす群.

$SL(n,R) = \{\, A \in GL(n,R) \mid \det A = 1 \,\}$.

$O(n,R) = \{\, A \in GL(n,R) \mid {}^t\!AA = E$（単位行列）$\}$.

$Sp(n,R) = \{\, M \in GL(2n,R) \mid I[M] = I \,\}$.

ここで

$$I = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$$

（E，0 はそれぞれ単位行列，零行列）.

$\mathcal{K}_n = Sp(n,R) \cap O(2n,R)$.

$\mathcal{Z}$：有限次複素ベクトル空間，特に $\mathcal{Z}_n = \{\, Z = Z^{(n)} = {}^tZ \,\}$,

$\mathrm{End}(\mathcal{Z})$： 線形写像 $l : \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ の集合.

$GL(\mathcal{Z}) = \{\, l \in \mathrm{End}(\mathcal{Z}) \mid l$ 可逆 $\}$.

$\mathcal{P}_n = \{\, Y = Y^{(n)} \,|\, Y = {}^tY$ 実行列, $Y > 0 \,\}$.

$\mathbb{H}_n = \{\, Z \in \mathcal{Z}_n \,|\, Z = X + iY,\, Y > 0 \,\}$.

$\mathcal{E}_n = \{\, W \in \mathcal{Z}_n \,|\, E - W\overline{W} > 0 \,\}$.

$\mathcal{R}_n =$ ミンコフスキー簡約行列のなす領域（I 章，2.2）.

$\mathcal{R}_n(u)$，$\mathcal{R}_n[u]$，II 章，1.1，II 章，1.3.

$\mathcal{F}_n$： ジーゲル基本領域（I 章，2.8）.

$\mathcal{F}_n(u)$： II 章，1.7.

$\mathfrak{G}_n = \{\, W = W^{(2n,n)} \,|\, I[W] = 0,\ \mathrm{rank}\, W = n \,\}$.

$\mathcal{G}_n = \mathfrak{G}_n / GL(n, \mathbb{C})$.

$J(\varphi, z)$： φ の z における関数行列,

$j(\varphi, z) = \det J(\varphi, z)$.

$\varGamma_n = Sp(n, \mathbb{Z})$, $\varGamma$ を $\varGamma_n$ と通約可能な群.

$[\varGamma, r]$： 重さ r のモジュラー形式のなすベクトル空間.

$[\varGamma, r]_0$： カスプ形式のなす部分空間.

$A(\varGamma) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} [\varGamma, r]$.

$K(\varGamma)$： モジュラー関数の体

$\varOmega_n = Sp(n, \mathbb{R})$.

$\varOmega_{n,m} =$

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \varOmega_n \,\middle|\, A = \begin{pmatrix} A_1^{(m)} & 0 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} C_1^{(m)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} D_1^{(m)} & D_2 \\ 0 & D_4 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\varGamma_{n,m} = \varOmega_{n,m} \cap \varGamma_n$.

$\varOmega^I_{n,m} = I \varOmega_{n,m} I^{-1}$.

$\mathfrak{S}_n$： n 次対称群.

$O_n(U, C)$，$O_n^*(U, C)$，II 章，§2 参照.

$W_n(U, C)$，$\widetilde{W}_n(U, C)$，II 章，§6 参照.

$\mathbb{H}_n^* = \mathbb{H}_n \cup \{$ 有理境界成分 $\}$.

$\mathcal{O}(X)$： X 上の正則関数全体の集合.

$\varOmega(X)$： 多様体 X 上の正則微分全体の集合.

$\varOmega^{\otimes k}(X)$： k 次正則テンソルの集合.

$\varOmega^{[k]}(X) = \{\, T \in \varOmega^{\otimes k}(X) \,|\, T$ 交代的 $\}$.

$\mathcal{K}^k(X)$： 重さ k の多重テンソルの集合.

Ω_f，$\Omega_f^{[m]}$，$\mathcal{K}_f^k$，接続性をもつ正則テンソル（III 章，§5 参照）．

$t_k = \dim \Omega_f^{\otimes k}$；　$g_k = \dim \Omega_f^{[k]}$；　$p_k = \dim \mathcal{K}_f^k$．

$$\omega_{ik} = \pm \bigwedge_{\substack{1 \le \mu < \nu \le n \\ (\mu,\nu) \ne (i,k)}} dz_{\mu\nu}.$$

$$\Omega = (e_{ik}\omega_{ik}),\ \text{ここで}\ e_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k\ \text{のとき}, \\ 1/2 & i \ne k\ \text{のとき}. \end{cases}$$

$V^{[p]}$：ベクトル空間 V の p 次外積．

$A \sqcap B$　III 章，§6 参照．

$\{f, g\}$　III 章，6.13 参照．

∂，$\partial^{[p]}$，$|\partial|_a^b$　III 章，§6 参照．

$\mathrm{Mult}(\mathcal{Z}^p, \mathbb{C})$：$\mathcal{Z}$ 上の p 重線形形式の集合．

$S_n(l) = \{\, A = A^{(n)} \mid A$ 整行列，$\det A = l \,\}$

$O_n(l) = \{\, M = M^{(2n)} \mid M$ 整行列，${}^tMIM = lI \,\}$．

$\mathcal{H}(R, S)$，$\mathcal{L}(R, S)$　IV 章，§1 参照．

$\mathcal{L}_n = \mathcal{L}(\mathcal{U}_n, \mathcal{G}_n)$，$\mathcal{U}_n = GL(n, \mathbb{Z})$，$\mathcal{G}_n = GL(n, \mathbb{Q})$，$\mathcal{H}_n = \mathcal{H}(\mathcal{U}_n, \mathcal{G}_n)$．

$\mathcal{L}_{n,p} = \mathcal{L}(\mathcal{U}_n, \mathcal{G}_{n,p})$，$\mathcal{G}_{n,p} = GL\left(n, \mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]\right)$．

Δ_n：　n 次有理シンプレクティック相似行列の群．

$\quad = \{\, M \in GL(2n, \mathbb{Q}) \mid I[M] = lI,\ l > 0 \,\}$．

$\Delta_{n,p} = \Delta_n \cap GL\left(2n, \mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]\right)$．

$E_\nu = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_\nu \le n} X_{i_1} \cdots X_{i_\nu}$　（ν 次基本対称式）．E_ν を次のアイゼンシュタイン級数と混同しないこと：

$$E_r(Z) = \sum_{\Gamma_{n,0} \backslash \Gamma_n} \det(CZ + D)^{-r},$$

$$R_i^{(n)} = \sum_{\substack{\varepsilon_\nu \in \{0,1,-1\} \\ |\varepsilon_1| + \cdots + |\varepsilon_n| = i}} X_1^{\varepsilon_1} \cdots X_n^{\varepsilon_n}.$$