

演習問題の詳細解

第 1 章

(1.1)

ばねの端に力 f を加えると、それぞれのばねに同じ力が伝わるので、それぞれのばねの伸びは f/k_1 , f/k_2 である。全伸びを δ とし、総合ばね定数を k とすると

$$\delta = \frac{f}{k} = \frac{f}{k_1} + \frac{f}{k_2}$$

が成立し、したがって、次の式を得る。

$$k = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2}$$

《補足》

$\delta_2 > \delta_0 > \delta_1$ を仮定すると

$$f = k_1(\delta_0 - \delta_1), \quad f = k_2(\delta_2 - \delta_0)$$

δ_0 を消去して

$$\delta_2 - \delta_1 = \delta = \frac{(k_1 + k_2)}{k_1 k_2} f$$

したがって、同様に

$$k = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2}$$

が求められる。

(1.2)

ばねの端に力 f を加えると両ばねともに同じだけ伸びる。総合ばね定数を k , 各ばねに加わる力を f_1 , f_2 とすると、次の式

$$f = k_1(\delta_2 - \delta_1) + k_2(\delta_2 - \delta_1) = (k_1 + k_2)(\delta_2 - \delta_1)$$

$$f = (k_1 + k_2)\delta$$

が成立し

$$k = k_1 + k_2$$

として求められる.

《補足》

$$\delta_2 - \delta_1 = \delta = \frac{f_1}{k_1} = \frac{f_2}{k_2}$$

$$f_1 + f_2 = f$$

より

$$\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) f_1 = \frac{f}{k_2}$$

を得る. ばね定数の定義より $f_1/k_1 = f/k$ とおけるゆえ

$$\frac{f}{k} = \frac{f_1}{k_1} = \frac{f}{k_1 + k_2}$$

したがって, 求める総合ばね定数 k は

$$k = k_1 + k_2$$

としても求められる.

第 2 章

(2.1)

運動方程式は

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k(x_1 - x_2), \quad m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 x_2 - k(x_2 - x_1)$$

この方程式の解を $x_1 = Ae^{\lambda t}$, $x_2 = Be^{\lambda t}$ とおいて上式に代入すれば, λ は次式の根として与えられる.

($x_1 = A \sin \omega t$, $x_2 = B \sin \omega t$ とおいて求めることもできる)

$$\left. \begin{aligned} (m_1 \lambda^2 + k_1 + k)A - kB &= 0 \\ -kA + (m_2 \lambda^2 + k_2 + k)B &= 0 \end{aligned} \right\}$$

この 2 式より λ を求めるため A , B を消去すると

$$(m_1 \lambda^2 + k_1 + k)(m_2 \lambda^2 + k_2 + k) - k^2 = 0$$

を得る. この根のうち小さい方を第 1 次, 大きい方を第 2 次固有角振動数という.

この第 1 式より 2 質点の振幅 A , B の比は

$$\frac{A}{B} = \frac{k}{m_1 \lambda^2 + k_1 + k}$$

と与えられ、また第 2 式より

$$\frac{A}{B} = \frac{m_2 \lambda^2 + k_2 + k}{k}$$

により与えられる。

上式の振動数の根を $\lambda_1 = j\omega_1$, $\lambda_2 = j\omega_2$ とすると、上の運動方程式の解は次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= A_{11} \cos \omega_1 t + B_{11} \sin \omega_1 t + A_{12} \cos \omega_2 t + B_{12} \sin \omega_2 t \\ x_2 &= A_{21} \cos \omega_1 t + B_{21} \sin \omega_1 t + A_{22} \cos \omega_2 t + B_{22} \sin \omega_2 t \end{aligned} \right\}$$

ω_1, ω_2 は、 $\lambda_{1,2} = j\omega_{1,2}$ を代入して

$$\frac{A}{B} = \frac{k}{-m_1 \omega_{1,2}^2 + k_1 + k} = \frac{-m_2 \omega_{1,2}^2 + k_2 + k}{k}$$

より、振動数方程式を導けば

$$\begin{vmatrix} k_1 + k - m_1 \omega_{1,2}^2 & -k \\ -k & k_2 + k - m_2 \omega_{1,2}^2 \end{vmatrix} = 0$$

これより

$$\omega_{1,2}^4 - \left(\frac{k_1 + k}{m_1} + \frac{k_2 + k}{m_2} \right) \omega_{1,2}^2 + \frac{k_1 k_2 + k_2 k + k k_1}{m_1 m_2} = 0$$

このとき

$$\omega_a^2 = \frac{k_1 + k}{m_1}$$

$$\omega_b^2 = \frac{k_2 + k}{m_2}$$

$$\omega_{ab}^2 = \frac{k}{\sqrt{m_1 m_2}}$$

とおくと

$$\omega_{1,2}^4 - (\omega_a^2 + \omega_b^2) \omega_{1,2}^2 + (\omega_a^2 \omega_b^2 - \omega_{ab}^4) = 0$$

したがって

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{\omega_a^2 + \omega_b^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_a^2 - \omega_b^2}{2}\right)^2 + \omega_{ab}^4}$$

上式を図式解法すると，**図 K.1** のように示される．

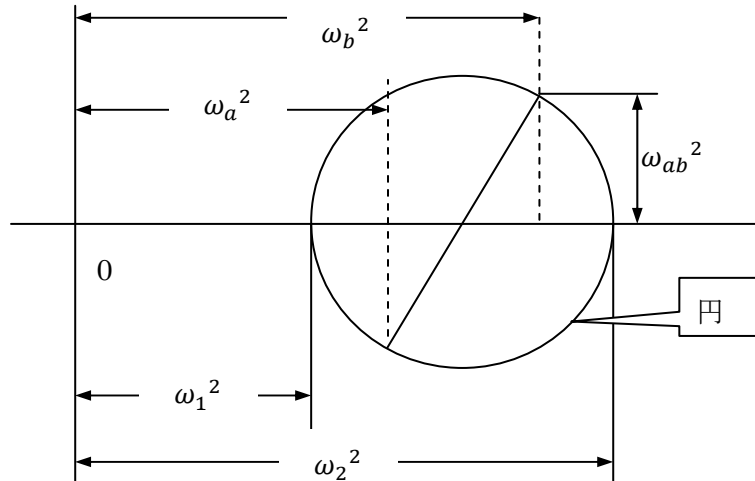


図 K.1

(2.2)

運動方程式は

$$m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx$$

解を $x = Ae^{\lambda t}$ とおき，上式に代入

$$(m\lambda^2 + c\lambda + k)Ae^{\lambda t} = 0$$

したがって， $m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$ となるような運動が生じる．書き換えると

$$\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

(1) $c > 2\sqrt{mk}$ の場合

$$\lambda = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} < 0$$

λ は常に実数であり，かつ負である．したがって，一般解は

$$\begin{aligned} x &= Ae^{\left(-\frac{c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right)t} + Be^{\left(-\frac{c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right)t} \\ &= e^{\left(-\frac{c}{2m}\right)t} \left[Ae^{\left\{\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right\}t} + Be^{\left\{-\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right\}t} \right] \end{aligned}$$

A, Bは初期条件により定まる.

Euler の公式

$$e^{\pm \lambda t} = \cosh \lambda t \pm \sinh \lambda t$$

を代入して, 初期条件を入れると, 双曲線関数で示され, 周期関数である正弦あるいは余弦関数が含まれていないことがわかる. すなわち, 周期関数ではなく, 時間とともに多くて1回極値をとった後, 時間とともに減衰する過減衰振動となる.

(2) $c = 2\sqrt{mk}$ の場合

特定方程式の根 λ

$$\lambda = -\frac{c}{2m}$$

これは重根をもつ場合であるので, 解は

$$x = (A_1 + A_2 t)e^{-\frac{c}{2m}t}$$

この式も周期関数である正弦あるいは余弦関数が含まれていないことがわかる. すなわち, 無周期関数となり, 振動は発生しない.

(2.3)

振子の質量と, ばねの復元トルクがつり合った状態が水平位置であると考え, 振子の角変位を静止の水平位置から右回りを正にとって θ で表す. 角変位 θ が小さいときは棒の重さを無視すれば, 振子に働く外力の支点 O まわりのモーメントはばねの復元トルク $(-ka\theta)a$, 重力のモーメント $mgl \cos \theta \cong mgl$ であり, 他方, 振子の O まわりの慣性モーメント $J = ml^2$ であるから, 運動方程式は

$$ml^2 \ddot{\theta} = -ka^2 \theta$$

これより求める固有角振動数 ω は

$$\omega^2 = \frac{ka^2}{ml^2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{ka^2}{ml^2}}$$

(2.4)

円板を幅 dr の狭い帯に分けると, この部分の質量 dm は

$$dm = (m/\pi a^2) \cdot (2\pi r \cdot dr) = (2m/a^2) \cdot r dr$$

であるから

$$J = \int_0^a \left(\frac{2m}{a^2} r dr \right) r^2 = \frac{2m}{a^2} \int_0^a r^3 dr = \frac{2m}{a^2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^a = \frac{1}{2} ma^2$$

(2.5)

座標軸を図のようにとり、棒を長さ dx の微小部分に分けると、原点より x の距離にある微小部分 dx の質量 dm は

$$dm = (m/l) \cdot dx$$

であるから

$$\begin{aligned} J_G &= \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} (dm)x^2 = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left(\frac{m}{l} \cdot dx \right) x^2 = \frac{m}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 dx \\ &= \frac{m}{l} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{1}{12} ml^2 \end{aligned}$$

(2.6)

棒の端における垂直な軸に関する慣性モーメント J は、 J_G の軸から h だけ離れた他の平行な軸に関する慣性モーメントであるから、平行軸の定理 (Steiner の定理) より

$$J = J_G + mh^2$$

したがって、先の問題の解より

$$J = J_G + m \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{12} ml^2 + \frac{1}{4} ml^2 = \frac{1}{3} ml^2$$

《補足》

あるいは、次のように求めることもできる。

$$J = \int_0^l (dm)x^2 = \frac{m}{l} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^l = \frac{1}{3} ml^2$$

(2.7)

物体の重心 G が 2 本吊り装置の中心線に一致するようにセットする。ワイヤーの長さは十分に長いものとし、図のワイヤー長さ $h \cong h'$ とする。ワイヤーの張力は質量

m の $1/2$ に等しい。物体を微小角 θ だけ回転したときワイヤーの下端の変位は $a \sin \theta$ である。ワイヤーの鉛直となす角を ϕ とすると、 $h \sin \phi = a \sin \theta$ である。すなわち $\sin \phi = (a/h) \sin \theta$ である。

回転角 θ は微小であるから、ワイヤーの張力 $mg/2$ の水平成分は

$$\frac{mg}{2} \sin \phi = \frac{mg a}{2 h} \sin \theta \cong \frac{mg a}{2 h} \theta$$

両方のワイヤーが物体に与える水平方向の成分は偶力をなし、そのモーメント M は

$$M = \frac{amg}{2h} \theta \cdot 2a = mg \frac{a^2}{h} \theta$$

重心軸まわりの慣性モーメント J_G で、重心軸まわりの運動方程式は

$$J_G \ddot{\theta} = -mg \frac{a^2}{h} \theta$$

したがって、固有角振動数 ω は

$$\omega = \sqrt{\frac{mga^2}{J_G h}}$$

で単振動をなす。

周期を T とおくと、重心まわりの慣性モーメント J_G は

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

より

$$J_G = \frac{a^2 mg}{4\pi^2 h} T^2$$

(2.8)

2 自由度系であるから、固有角振動数は 2 つ生じる。式 (2.28)、式 (2.29) を再掲すると

$$\omega_{n1} = \sqrt{\frac{m_1 k_2 + m_2 (k_1 + k_2) - \sqrt{\{m_1 k_2 + m_2 (k_1 + k_2)\}^2 - 4m_1 m_2 k_1 k_2}}{2m_1 m_2}}$$

$$\omega_{n2} = \sqrt{\frac{m_1 k_2 + m_2 (k_1 + k_2) + \sqrt{\{m_1 k_2 + m_2 (k_1 + k_2)\}^2 - 4m_1 m_2 k_1 k_2}}{2m_1 m_2}}$$

ここで、 $k_1 = 0$, $k_2 = k$ であるから、上式はそれぞれ

$$\omega_{n1} = \sqrt{\frac{m_1k + m_2k - \sqrt{\{m_1k + m_2k\}^2}}{2m_1m_2}} = 0$$

$$\omega_{n2} = \sqrt{\frac{m_1k + m_2k + \sqrt{\{m_1k + m_2k\}^2}}{2m_1m_2}} = \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1m_2}}$$

となる.

《補足》

いま $m_1 = m_2$ の場合を検討すると

$$\omega_{n1} = \sqrt{\frac{2mk - 2mk}{2m^2}} = 0$$

$$\omega_{n2} = \sqrt{\frac{2mk + 2mk}{2m^2}} = \sqrt{\frac{2k}{m}} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

となり, ω_{n1} は振動しない. ω_{n2} は $\sqrt{2}\sqrt{k/m}$ にて, 2つの質点は図 K.2 のように逆相にて振動することがわかる.

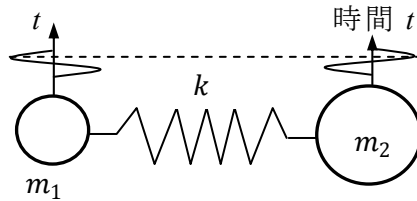


図 K.2

(2.9)

運動方程式を立てると

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= -k_1(x - l_1\theta) - k_2(x + l_2\theta) \\ J_G\ddot{\theta} &= mr^2\ddot{\theta} = l_1k_1(x - l_1\theta) - l_2k_2(x + l_2\theta) \end{aligned} \right\}$$

m : 質量

r : 重心の回転半径

x : 重心の上下変位

θ : 重心の角変位

$J_G = mr^2$: 重心まわりの物体の慣性モーメント, r は求める回転中心による慣性モーメントに等しくなるように, 質量を一点に集中したとき, その回転軸からの距離で回転半径と呼ぶ. この場合 $r^2 = J_G/m$ である. ここで

$$A = \frac{k_1 + k_2}{m}$$

$$B = \frac{l_2 k_2 - l_1 k_1}{m}$$

$$C = \frac{l_1^2 k_1 + l_2^2 k_2}{mr^2}$$

とおくと

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + Ax + B\theta &= 0 \\ \ddot{\theta} + \frac{B}{r^2}x + C\theta &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$B = 0$ のとき，上式は θ と無関係，下式は x と無関係となるため， B は連成係数と呼ばれる。

$B = 0$ にするには， $l_1 k_1 = l_2 k_2$ の関係が必要である。

いま

$$x = X \cos \omega t$$

$$\theta = \Theta \cos \omega t$$

とおくと

$$\left. \begin{aligned} (A - \omega^2)X + B\Theta &= 0 \\ \left(\frac{B}{r^2}\right)X + (C - \omega^2)\Theta &= 0 \end{aligned} \right\}$$

これより，振幅比は


$$\frac{X}{\Theta} = -\frac{B}{A - \omega^2} = -\frac{C - \omega^2}{\frac{B}{r^2}}$$

を得る。これにより主振動系に対する振動数方程式は

$$\omega_{1, 2}^4 - (A + C)\omega_{1, 2}^2 + \left(AC - \frac{B^2}{r^2}\right) = 0$$

したがって

$$\omega_{1, 2}^2 = \frac{1}{2}(A + C) \mp \sqrt{\frac{1}{4}(A - C)^2 + \frac{B^2}{r^2}}$$

振動モードを描くと  **K.3** のようになる。

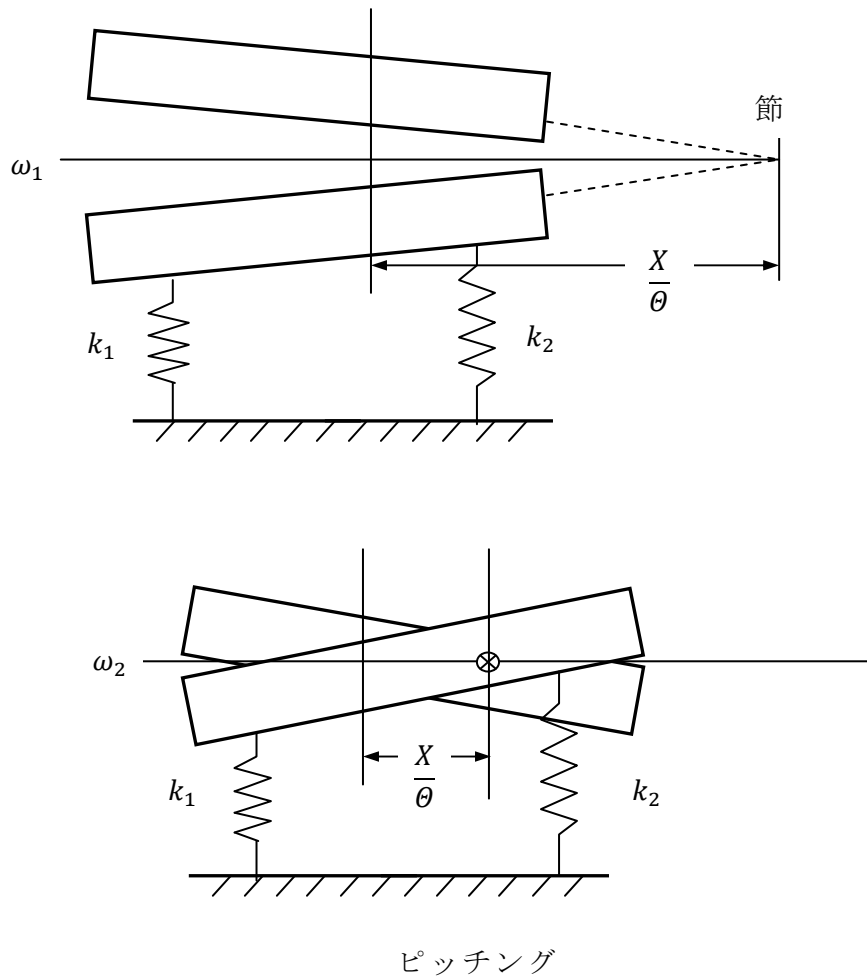


図 K.3

(2.10)

① 固有角振動数

質量 $m = 3[\text{kg}] = 3[\text{Ns}^2/\text{m}]$ ($1\text{N} = 1\text{kgm}/\text{s}^2$) であるから

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{6000}{3}} = 44.7 [\text{rad/s}]$$

② 固有周波数

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} \cong \frac{44.7}{2 \cdot 3.14} = 7.1 [\text{Hz}]$$

③ 固有周期

$$T_n = \frac{1}{f_n} = \frac{1}{7.1} = 0.14 \text{ [s]}$$

④ 片振幅 式 (2.16) より

$$A = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2 + A_0^2} = \sqrt{\left(\frac{7}{44.7}\right)^2 + 0.2^2} = 0.25 \text{ [m]}$$

⑤ 初期位相角 式 (2.17) より

振動を正弦波で表現する場合

$$\varphi_1 = \tan^{-1}\left(\frac{A_0\omega_n}{v_0}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{0.2 \times 44.7}{7}\right) = 0.9 \text{ [rad]} = 0.29\pi \text{ [rad]} = 52.2 \text{ [}^\circ \text{]}$$

振動を余弦波で表現する場合

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= -\tan^{-1}\left(\frac{v_0}{A_0\omega_n}\right) \\ &= -\tan^{-1}\left(\frac{7}{0.2 \times 44.7}\right) = -0.66 \text{ [rad]} = -0.21\pi \text{ [rad]} = -37.8 \text{ [}^\circ \text{]} \end{aligned}$$

(解説)

$|\varphi_1| + |\varphi_2| = 0.5\pi \text{ [rad]} = 90 \text{ [}^\circ \text{]}$ と常になる.

参考公式

$$\left(\begin{array}{l} a \cos \omega t + b \sin \omega t = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\omega t + \varphi_1) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(-\omega t + \varphi_2) \\ = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\omega t - \varphi_2) \\ \varphi_1 = \tan^{-1} \frac{a}{b}, \quad \varphi_2 = \tan^{-1} \frac{b}{a} \\ a, b \text{ は正の鋭角.} \end{array} \right)$$

⑥ 振動波形の式

正弦波での表現, $x = 0.25 \sin(44.7t + 0.9)$, 余弦波での表現, $x = 0.25 \cos(44.7t - 0.66)$

⑦ 波形の概略図

正弦波の初期位相 $+0.9 \text{ rad}$ の時間は, $\frac{0.9}{44.7} \text{ [s]} = 0.02 \text{ [s]}$

余弦波の初期位相 -0.66 rad の時間は, $\frac{-0.66}{44.7} \text{ [s]} = -0.015 \text{ [s]}$

$$\omega_n = 44.7 \text{ [rad/s]} \text{ より } (44.7/\pi) \times \pi \text{ [rad/s]} = 14.2\pi \text{ [rad/s]}$$

⑧ 速度と時間の関係

$x = 0.25 \sin(44.7t + 0.9)$ より，速度は変位を時間 t で微分すると求められる．

$$\dot{x} = 0.25 \times 44.7 \cos(44.7t + 0.9) = 11.2 \cos(44.7t + 0.9) \text{ [m/s]}$$

したがって，振動波形の概略図は図 K.4 のとおり．

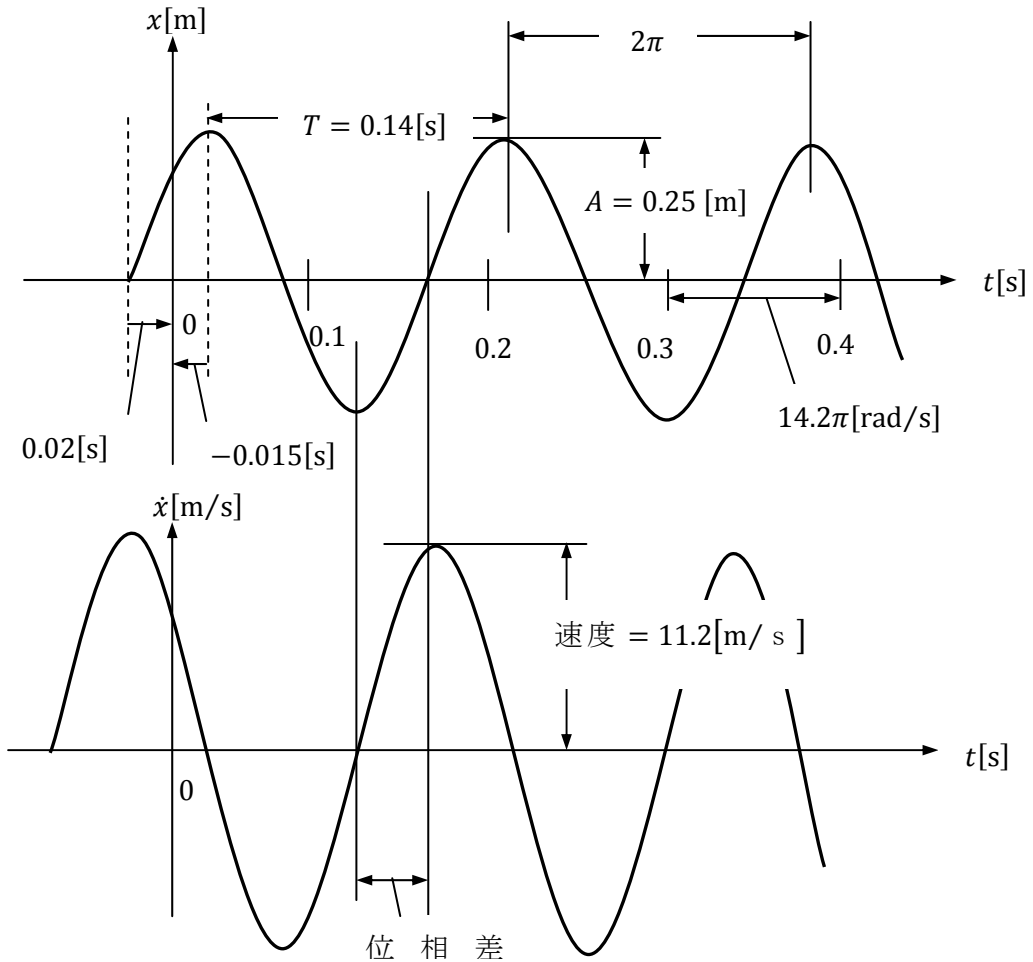


図 K.4

(2.11)

静的にはばねの復原力 kx_{st} と質量に掛る重力とつり合っているから

$$kx_{st} = mg \quad \text{よって} \quad k = mg/x_{st}$$

したがって，固有角振動数 ω_n は

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{mg/x_{st}}{m}} = \sqrt{\frac{g}{x_{st}}} = \sqrt{\frac{9.8}{0.5 \times 10^{-3}}} = 145 \text{ [rad/s]}$$

(2.12)

① 減衰比

$$c_c = 2\sqrt{mk} = 2\sqrt{40[\text{Ns}^2/\text{m}] \times 840,000[\text{N/m}]} = 11590[\text{Ns/m}]$$

したがって、減衰比 ζ は

$$\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{900[\text{Ns/m}]}{11590[\text{Ns/m}]} = 0.08$$

② 減衰固有角振動数

$m = 40[\text{kg}] = 40[\text{Ns}^2/\text{m}]$ であるから、不減衰固有角振動数 ω_n は

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{840,000[\text{N/m}]}{40[\text{Ns}^2/\text{m}]}} = 145[\text{rad/s}]$$

したがって、減衰固有角振動数は

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 145[\text{rad/s}] \times \sqrt{1 - 0.08^2} = 145[\text{rad/s}] \times 0.99 = 143[\text{rad/s}]$$

③ 減衰固有振動数

$$f_d = \frac{\omega_d}{2\pi} = \frac{143[\text{rad/s}]}{2\pi[\text{rad}]} = 22.8[\text{Hz}]$$

④ 周期

$$T = \frac{1}{f_d} = \frac{1}{22.8[\text{cycle/s}]} = 0.044[\text{s/cycle}]$$

⑤ 対数減衰率 δ

$$\delta = \zeta \omega_n T = 0.08 \times 145[\text{rad/s}] \times 0.044[\text{s/cycle}] = 0.5$$

あるいは

$$\delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{2\pi \times 0.08}{\sqrt{1 - 0.08^2}} = 0.5$$

⑥ 最初に生じた振幅（片振幅）とその次から 2 番目の振幅との比

$$\delta = \frac{1}{m} \ln \frac{a_n}{a_{n+m}}$$

$$0.5 = \frac{1}{2} \ln \frac{a_{n=1}}{a_{(n=1)+(m=2)}}$$

$$1 = \ln \frac{a_1}{a_3}$$

$$\frac{a_1}{a_3} = 2.718$$

最初から 3 番目（最初の次から 2 番目）に生じた振幅は最初に生じた振幅の $1/2.718 \cong 0.37$ 倍となる.

⑦ 変位の時間による関数表示

式 (2.15), 式 (2.16) より, $t=0$ のとき, $x = X_0$, $\dot{x} = V_0$.

$$x = e^{-\sigma t} A_0 \cos(\omega_d t + \varphi_0)$$

$$\sigma = \omega_n \zeta = 145[\text{rad/s}] \times 0.08 = 11.6[\text{rad/s}]$$

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{\sqrt{\omega_n^2 X_0^2 + 2\omega_n \zeta X_0 V_0 + V_0^2}}{\omega_d} \\ &= \frac{\sqrt{(145[\text{rad/s}])^2 \times (0.2[\text{m}])^2 + 2 \times 145[\text{rad/s}] \times 0.08 \times 0.2[\text{m}] \times 7[\text{m/s}] + (7[\text{m/s}])^2}}{143[\text{rad/s}]} \\ &= 0.21[\text{m}] \end{aligned}$$

$$\tan \varphi_0 = -\frac{V_0 + \omega_n \zeta X_0}{\omega_d X_0} = -\frac{7[\text{m/s}] + 145[\text{rad/s}] \times 0.08 \times 0.2[\text{m}]}{143[\text{rad/s}] \times 0.2[\text{m}]} = -0.326$$

$$\varphi_0 = -0.315[\text{rad}]$$

(解説)

φ_0 が小のとき, $\tan \varphi_0 \cong \sin \varphi_0 \cong \varphi_0$ [rad])

しかるに, 余弦波で示すと

$$x = e^{-11.6t} \times 0.21 \times \cos(143t - 0.315) [\text{m}]$$

または, 正弦波で示すと

$$x = e^{-11.6t} \times 0.21 \times \sin(143t + \varphi_s) [\text{m}]$$

$$\varphi_s = \tan^{-1} \frac{\omega_d X_s}{\dot{x}_s + \omega_n \zeta X_s} = 1.255 [\text{rad}] = \frac{\pi}{2} - 0.315 [\text{rad}]$$

⑧ 概略図

0.315rad 経過後の最大振幅は

$$A_0 e^{-\sigma t} = 0.21 \times e^{-11.6t} = 0.21 \times e^{-11.6 \times 0.0022} = 0.21 \times 0.97 = 0.2 [\text{m}]$$

であるから, 概略図は図 K.5 のとおり.

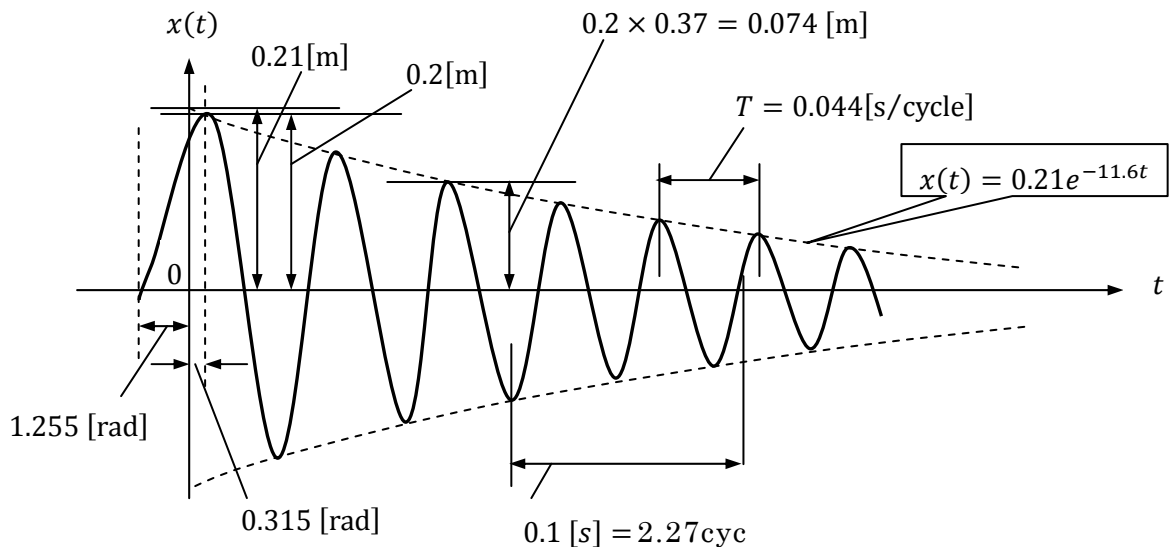


図 K.5

第 3 章

(3.1)

道路の波長 l で、車両の速度 v であるから、走行車両に対する車輪から伝えられる変位の強制振動周期 T は

$$T = \frac{l}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$$

したがって

$$\omega = \frac{2\pi v}{l}$$

しかるに、車輪は上下方向に

$$x_h = a \sin \omega t$$

の強制変位を受ける。運動方程式は

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{x}_h) + k(x - X_h) = 0$$

この式は本文の式 (3.20) と同じであるから、絶対変位 x の時間に対する変化を求めることができる。

共振する車両速度 v_R は、式 (3.21) の $\beta = 1$ のときであるから、 $\omega = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ において

$$\zeta = \frac{c}{c_c}$$

$$\frac{2\pi v_R}{l} = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

$$v_R = \frac{l}{2\pi} \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} = \frac{l}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{1 - 2\zeta^2} \cong \frac{l}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

(3.2)

運動方程式は

$$m\ddot{x} + (c_1 + c_2)\dot{x} - c_1\dot{x}_h + k(x - x_h) = 0$$

強制変位 $x_h = h \sin \omega t$ であるから

$$x_h = h e^{j\omega t}, \quad x = A e^{j\omega t}$$

しかるに

$$\frac{A}{h} = \frac{2j\sqrt{\frac{k}{m}}\omega\gamma_1 + \frac{k}{m}}{-\omega^2 + 2j\sqrt{\frac{k}{m}}(\gamma_1 + \gamma_2)\omega + \frac{k}{m}}$$

上式を有理化して

$$\left| \frac{A}{h} \right| = \sqrt{\frac{1 + 4\gamma_1^2\beta^2}{(1 - \beta^2)^2 + 4(\gamma_1 + \gamma_2)^2\beta^2}}$$

共振点では $\omega \cong \omega_n$ であるから, $\omega = \omega_n$ のとき

$$\left| \frac{x}{h} \right| = \left| \frac{A}{h} \right| = \frac{\sqrt{1 + 4\gamma_1^2}}{2(\gamma_1 + \gamma_2)}$$

質点 m の振幅が強制変位 h より小さくなる条件は

$$\frac{\sqrt{1 + 4\gamma_1^2}}{2(\gamma_1 + \gamma_2)} \leq 1$$

すなわち

$$\gamma_2 \geq \sqrt{\gamma_1^2 + \frac{1}{4}} - \gamma_1$$

と設定すると振動伝達率を常に 1 以下にすることができる。このような形式の振動吸収機をスカイフックダンパーと呼ぶ。

ただし

$$\gamma_1 = \frac{c_1}{2m} \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \gamma_2 = \frac{c_2}{2m} \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \beta = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

とする.

《補足》

たとえば、トラックの運転席であるキャブを制振する場合、演習問題(本問)の c_2 を取り付けることは不可能である. そこでキャブの上向き変位と下向き変位をセンシングし、 c_1 のダンパー減衰力をコンピュータ制御し、あたかもスカイフックダンパーが取り付けられているような働きを行う制御の研究が報告されている.

(3.3)

運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} J_1 \ddot{\theta}_1 &= -k(\theta_1 - \theta_2) \\ J_2 \ddot{\theta}_2 &= k(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned} \right\}$$

初期条件として $t=0$ のとき $\dot{\theta}_1 = \omega_0$, $\dot{\theta}_2 = 0$, $\theta_1 = \theta_2 = 0$.

以上の条件下にてラプラス変換を行う.

上式の両辺を J_1 で除して、左辺は

$$s \ddot{\theta}_1 = s^2 \int \theta_1 - s\theta_1(0) - \dot{\theta}_1(0) = s^2 \int \theta_1 - \omega_0$$

右辺は

$$s \left\{ -\frac{k}{J_1} (\theta_1 - \theta_2) \right\} = -\frac{k}{J_1} s \int \theta_1 + \frac{k}{J_1} s \int \theta_2$$

となり

$$\left(s^2 + \frac{k}{J_1} \right) s \int \theta_1 = \frac{k}{J_1} s \int \theta_2 + \omega_0$$

下式も同様に

$$s \ddot{\theta}_2 = s^2 \int \theta_2 - s\theta_2(0) - \dot{\theta}_2(0) = s^2 \int \theta_2$$

$$s \left\{ \frac{k}{J_2} (\theta_1 - \theta_2) \right\} = \frac{k}{J_2} s \int \theta_1 - \frac{k}{J_2} s \int \theta_2$$

となり

$$\left(s^2 + \frac{k}{J_2}\right) f\theta_2 = \frac{k}{J_2} f\theta_1$$

を得る。これらより

$$\left(s^2 + \frac{k}{J_1} + \frac{k}{J_2}\right) f\theta_1 - \left(s^2 + \frac{k}{J_1} + \frac{k}{J_2}\right) f\theta_2 = \omega_0$$

これより

$$f(\theta_1 - \theta_2) = \omega_0 \frac{1}{s^2 + \frac{k}{J_1} + \frac{k}{J_2}}$$

ここで

$$\frac{k}{J_1} + \frac{k}{J_2} = k \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} = \omega^2$$

とおく。

$$f(\theta_1 - \theta_2) = \omega_0 \frac{1}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega_0}{\omega} \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ここで、常用ラプラス対関数表より} \\ f f(t) \equiv F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \\ f(t) = \sin \omega t \end{array} \right\}$$

したがって

$$\theta_1 - \theta_2 = \frac{\omega_0}{\omega} \sin \omega t = \omega_0 \cdot \sqrt{\frac{J_1 J_2}{k(J_1 + J_2)}} \cdot \sin \omega t$$

軸のねじりトルク T_p は

$$T_p = k(\theta_1 - \theta_2) = \omega_0 \cdot \sqrt{\frac{k \cdot J_1 J_2}{(J_1 + J_2)}} \cdot \sin \omega t$$

固有角振動数 ω は

$$\omega = \sqrt{k \cdot \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2}}$$

《補足》

静止しているトラックなどの駆動系に、クラッチを急激に繋ぐことによりエンジン回転を繋ぐと、本演習問題のような現象を生じるが、伝達クラッチトルクの最大

値や、タイヤと路面の滑り等で、軸のねじりトルクには限界がある。

(3.4)

ブラケットの剛性を算出する。

曲げ剛性

$$EI = E \cdot \frac{1}{12}bh^3$$

E ：縦弾性係数， I ：断面二次モーメント。

壁から l の部位のたわみ δ_{st} は

$$\delta_{st} = \frac{mg \cdot l^3}{3EI}$$

以上は材料力学の公式による。

したがって、ばね定数 k は

$$k = \frac{mg}{\delta_{st}} = \frac{3EI}{l^3} = \frac{Ebh^3}{4l^3}$$

1 自由度の質量 m ，ばね定数 k の自由振動の運動方程式と等価である。固有角振動数 ω_0 は

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{Ebh^3}{m \cdot 4l^3}}$$

これより

$$h = \sqrt[3]{\omega_0^2 \cdot \frac{4ml^3}{Eb}}$$

したがって、共振点の固有角振動数を 2 倍以上にするには $\omega_0 \rightarrow (2\omega_0)$ へ置き換え

$$h \rightarrow \sqrt[3]{4}h \cong 1.59h$$

板厚 h を 1.59 倍以上にすることが求められる。

(3.5)

同一車型，同速度（ただし互いに逆方向）で衝突したので，同じ条件で固定壁に衝突した場合と同じである。また，衝突後は反発係数 $e=0$ であるから，衝突後塑性ばねがつぶれた状態でそのまま車両は停止する。

したがって、衝突始めから衝突終了までは、単振動の 1/4 周期とみることができる。

質量 m 、ばね定数 k の 1 自由度系、単振動の固有角振動数 ω は

$$x = A \sin \omega t$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

しかるに、衝突始めから衝突終了までの時間を Δt とおくと

$$\Delta t = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}}$$

として求められる。

衝突の衝撃力 F は、運動量保存の法則と力積の関係より

$$mv_0 = F\Delta t$$

$$F = \frac{mv_0}{\Delta t} = \frac{mv_0}{\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}}} = \frac{2}{\pi} v_0 \sqrt{mk}$$

で求められる。

《補足》

車両の速度が低いときには、一般的に反発係数 e は零ではなく、反発係数を若干有する。衝突始めから衝突終わりまでの車両の変位と時間の関係を描くと図 K.6 のようになる。

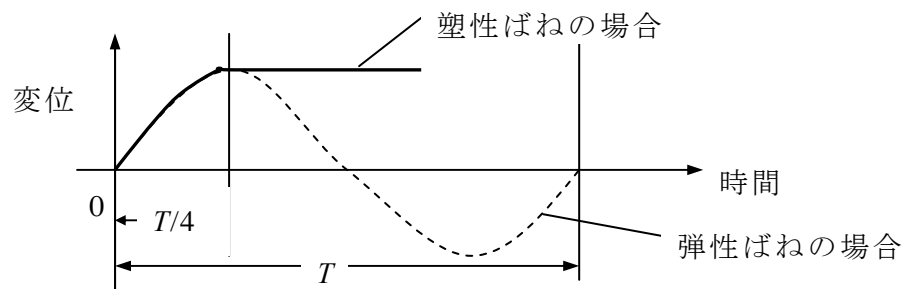


図 K.6

(3.6)

質量 m の微小角変位 θ 、ばねの伸び・縮み $l_2\theta$ 、ばねの復原力による支点 0 まわ

りのモーメント M は

$$M = \left(-\frac{k}{2}l_2\theta\right)l_2 - \left(\frac{k}{2}l_2\theta\right)l_2 = -kl_2^2\theta$$

振子の回転自由支点 O まわりのモーメントのつり合いは

$$mgl_1^2\ddot{\theta} = -kl_2^2\theta + mgl_1\theta = -(kl_2^2 - mgl_1)\theta$$

したがって、振子の固有角振動数 ω_n は

$$\omega_n = \sqrt{\frac{kl_2^2 - mgl_1}{mgl_1^2}}$$

外力の角振動数は ω_0 であるから、 $\omega_n \ll \omega_0$, または $\omega_n \gg \omega_0$ に設計することにより、周期外力との共振を避けることができる。

《補足》

この演習問題は実例として、自動車の手動式トランスミッションのチェンジレバーのびびり振動対策などがあげられる。

(3.7)

減衰を考慮しなく軸のふれまわり角速度と回転速度が一致している場合で、かつジャイロ効果を見捨てる場合（円板は傾かない）についてとする。軸は弾性体であるから、振動による動的たわみを r とすると、復元力 $F_r = kr$ が作用する。円板重心の距離を e とし、軸のばね定数を k 、 m は円板の質量とする。

軸は一定回転で ω [rad/s] で回転しているとする、円板重心にかかる遠心力 $F_c = m(r+e)\omega^2$ と復元力はつり合うから、 $F_c = F_r$ より

$$m(r+e)\omega^2 = kr$$

これより

$$r = \frac{me\omega^2}{k - m\omega^2} = \frac{e(\omega/\omega_n)^2}{1 - (\omega/\omega_n)^2}$$

軸系の曲げ固有角振動数 ω_n は

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

危険回転は $\omega = \omega_n$ のときに生じる。回転速度 N_n に換算すると

$$N_n = 60 \cdot \frac{\omega_n}{2\pi} \quad (\text{rpm})$$

なお，両端単純支持の軸のばね定数 k は材料力学の公式により

$$k = \frac{3EI}{l_1^2 l_2^2}$$

E ：縦弾性係数， I ：断面二次モーメント

e ：偏心量

r_0 ：静止状態のときのたわみ（図 K.7 の δ_{st} に相当する）

r ：回転中の新たなたわみ（振動による変位）

この回転軸の振動は，周期外力が加えられた 1 自由度ばね - 質量系と等価となる．静止状態のときのたわみ r_0 は振動方程式には無関係となる．それは，ばね - 質量モデルにおける場合と同じである．1 自由度のばね - 質量系で示せば，下向きの力を正にとり，力のつり合いを式で示すと

$$-m\ddot{x} + mg - kx - k\delta_{st} = 0$$

$$\delta_{st} = \frac{mg}{k}$$

δ_{st} ：重力によるばねの静的な伸びであり，結局，重力の影響はつり合い方程式に無関係となる．図 K.7 参照．

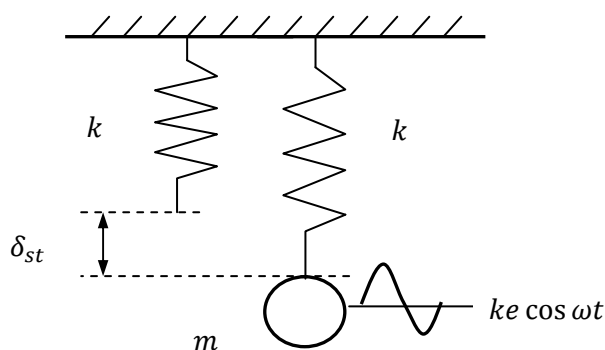


図 K.7

《補足 1》

偏心量 $e = 0$ であっても， $\omega = \omega_n$ で変位は不定の形になり，軸は横たわみに対して不安定になる．したがって，偏心量がない場合でも軸の危険速度は軸の横曲げ固有角振動数と一致するから，軸の横曲げ固有角振動数を算出しておくことが肝要である．

たとえば，境界条件が両端単純支持の軸の横曲げ固有角振動数は

$$\omega_n = \left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

i : 振動モード次数 (ここでは 1 次モードを扱い, $i = 1$ とおく)

したがって, 危険速度を rpm で示すと

$$N_c = 60 \frac{\pi}{2l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad [\text{rpm}]$$

A : 軸の断面積, ρ : 密度.

《補足 2》二次的な危険速度 (図 K.8 参照)

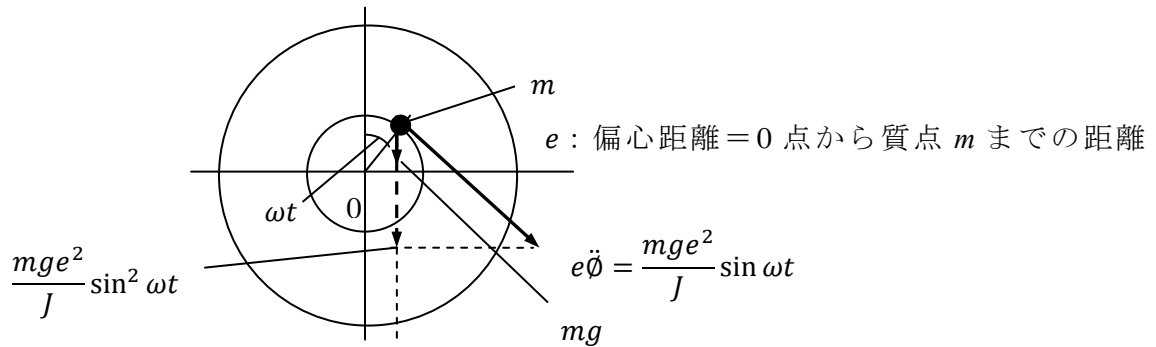


図 K.8

やはり水平におかれた回転軸に質量 m の不つり合いのある円板が回転している場合を考える. 偏心量 e とすると, 円板には周期的にモーメント $M = mge \sin \omega t$ が作用する. したがって, 円板の運動方程式は円板の慣性モーメント J とおくと

$$J\ddot{\phi} = mge \sin \omega t$$

よって, 円板の接線方向の加速度は

$$e\ddot{\phi} = \frac{mge^2}{J} \sin \omega t$$

この垂直成分 α は

$$\alpha = \frac{mge^2}{J} \sin^2 \omega t$$

よって, 重心における力は

$$m\alpha = \frac{m^2ge^2}{J} \sin^2 \omega t$$

が作用しているので

$$m\alpha = \frac{m^2ge^2}{J} \sin^2 \omega t = \frac{m^2ge^2}{J} \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t)$$

したがって, 円板の回転による角振動数 ω は

$$\omega = \frac{\omega_n}{2}$$

(ω_n : 円板付き軸の横曲げ固有角振動数)

のときに共振する。これを回転軸の重力の影響による二次的な危険角速度という。

《補足 3》減衰を考慮

質量 m , ばね定数 k , 粘性減衰係数 c の 1 自由度振動系と等価で考えることができ、強制角振動数 ω , 強制力の最大振幅 $me\omega^2$ が働く。

したがって、式 (3.9), 式 (3.10) より最大たわみ r と位相角 φ は

$$r = \frac{\frac{me\omega^2}{k}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta^2)}}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{-2\zeta\beta}{1-\beta^2}\right)$$

上の式の両辺を e で除すると

$$\frac{r}{e} = \frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta^2)}}$$

ただし、 $\beta = \omega/\omega_n$, $\zeta = c/c_c$, $c_c = 2m\omega_n$ で臨界減衰係数。

ζ が小のときでは、高速回転 ($\beta \gg 1$) で、 $r/e \cong 1$ であり、たわみは小さくなる。高速危険速度を防ぐには ω_n を低く、つまりばね定数 k を低くする方法を取ることが考えられる (遠心分離機やタービンなどの高速回転機械に利用される場合がある)。

(3.8)

(1) 周波数 $f_1 = 5$ [Hz] の正弦波の入力

① 運動方程式

$$mx'' = -c\dot{x} - kx + F \sin \omega t$$

外力の角振動数 $\omega = \omega_1$ は

$$\omega_1 = 2\pi f_1 = 2\pi \times 5 = 31.4 \text{ [rad/s]}$$

よって

$$20\ddot{x} + 10\dot{x} + 3,000x = 100 \sin 31.4t$$

② 不減衰, 自由振動の固有角振動数

$$20[\text{kg}] = 20 [\text{Ns}^2/\text{m}] \text{ より}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{3,000}{20}} = 12.2 \text{ [rad/s]}$$

③ 減衰比

$$\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2\sqrt{mk}} = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{10}{2 \times 20 \times 12.2} = 0.02$$

④ 定常状態の変位の応答

変位 x は

$$x = e^{-\sigma t} A_0 \cos(\omega_d t + \varphi_0) + A_s \sin(\omega t + \varphi)$$

いま、定常振動を扱うから

$$x = A_s \sin(\omega t + \varphi)$$

$$A_s = \frac{\frac{F}{k}}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} = \frac{\frac{100}{3,000}}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{31.4}{12.2}\right)^2\right\}^2 + \left(2 \times 0.02 \times \frac{31.4}{12.2}\right)^2}} = 0.006 \text{ [m]}$$

⑤ 振幅倍率

式 (3.13) より

$$\frac{|A_s|}{A_{st}} = \frac{|A_s|}{F/k} = \frac{1}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{31.4}{12.2}\right)^2\right\}^2 + \left(2 \times 0.02 \times \frac{31.4}{12.2}\right)^2}} = 0.18$$

⑥ 周期外力と応答の位相 φ_1

$$\varphi_1 = \tan^{-1} \frac{-2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = \tan^{-1} \frac{-2 \times 0.02 \times \frac{31.4}{12.2}}{1 - \left(\frac{31.4}{12.2}\right)^2} = \tan^{-1} 0.02$$

$$\varphi_1 = 0.02 \text{ [rad].}$$

⑦ 共振角振動数

$$\omega = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} = 12.2 \times \sqrt{1 - 2 \times 0.02^2} = 12.2 \text{ [rad/s]}$$

(解説 1) (図 K.9 参照)

(強制振動減衰系の共振角振動数は、不減衰時の固有角振動数とほとんど同じである.)

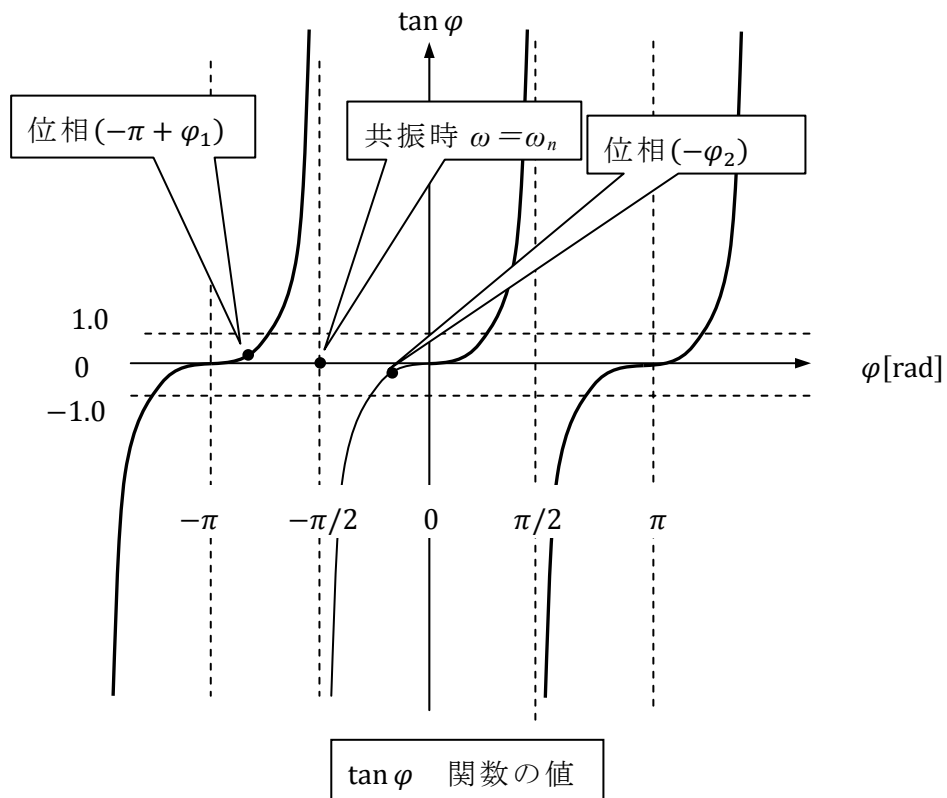


図 K.9

(2) 周波数 $f_2 = 0.5$ [Hz] の正弦波の入力

⑧ 正弦波外力周波数の角振動数 $\omega = \omega_2$ は, $\omega_2 = 2\pi f_2 = 2\pi \times 0.5 = 3.14$ [rad/s]

⑨ $f_2 = 0.5$ Hz のときの応答の位相 φ_2

$$\varphi_2 = \tan^{-1} \frac{-2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = \tan^{-1} \frac{-2 \times 0.02 \times \frac{3.14}{12.2}}{1 - \left(\frac{3.14}{12.2}\right)^2} = \tan^{-1}(-0.01)$$

よって, $\varphi_2 = -0.01$ [rad].

位相関係を図示すると, 図 K.9 のようになる.

- i) 共振周波数より十分高い周波数 $f_1(\omega_1 = 31.4$ [rad/s]) で加振すると, 位相差は π [rad] に近くなる.
- ii) 共振点 (12.2 [rad/s]) で位相は $\pi/2$ [rad] となる.
- iii) 共振点 (12.2 [rad/s]) より低い周波数 $f_2(\omega_2 = 3.14$ [rad/s]) で加振した場合には, 位相差は 0 [rad] に近い.

(解説 2) 次に外力周波数 f_1 と f_2 のときの概略図を図 K.10 に描く.

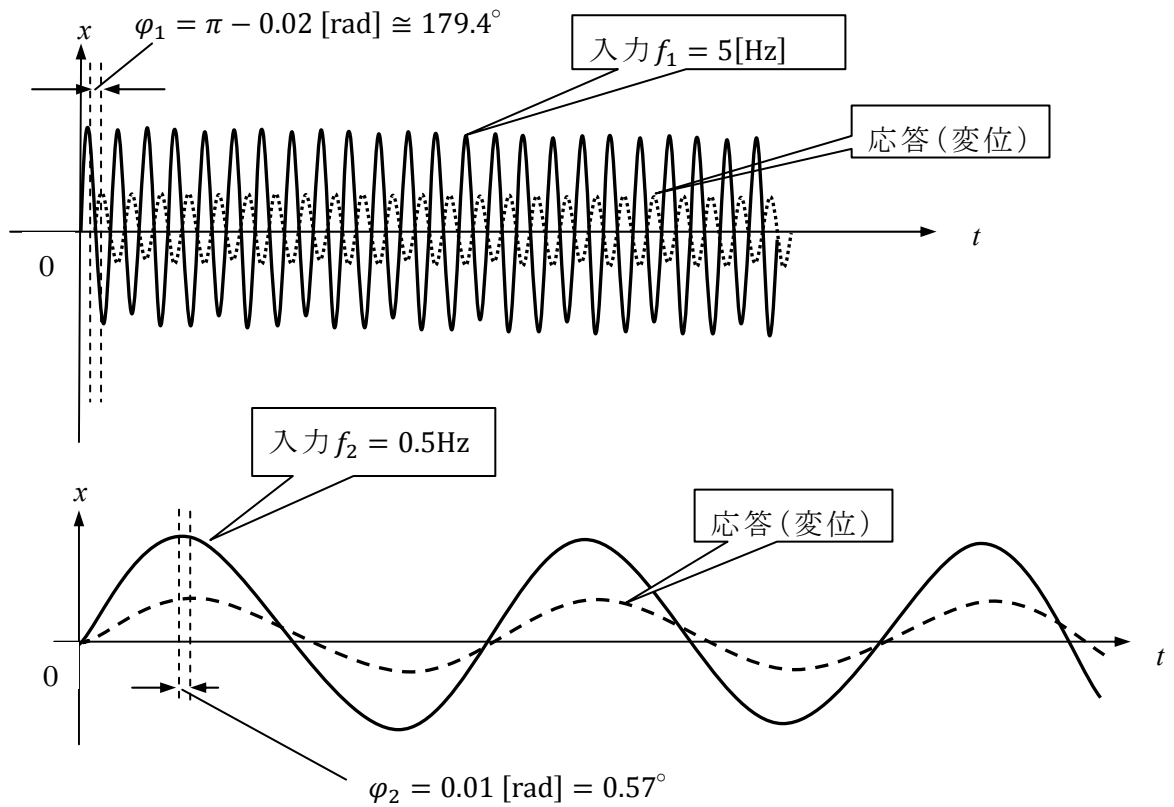


図 K.10

(3.9)

$$\{\phi_1\}^T F = \begin{bmatrix} 0.62 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 10,000 \\ 0 \end{Bmatrix} = 6,200$$

$$\{\phi_2\}^T F = \begin{bmatrix} -1.63 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 10,000 \\ 0 \end{Bmatrix} = -16,300$$

モード座標は、式 (3.49) より

$$\xi_r(t) = \frac{\{\phi_r\}^T \{F\}}{-\omega^2 m_r + j\omega c_r + k_r} \times \sin \omega t$$

いま、 $c_r = 0$ 、 $\omega = 4$ [rad/s] であるから

$$\xi_{r=1} = \frac{\{\phi_1\}^T \{F\}}{-\omega^2 m_{r=1} + k_{r=1}} = \frac{\begin{bmatrix} 0.62 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 10,000 \\ 0 \end{Bmatrix}}{-4^2 \times 138.44 + 5288} = \frac{6200}{3072.96} = 2.02$$

$$\xi_{r=2} = \frac{\{\phi_2\}^T \{F\}}{-\omega^2 m_{r=2} + k_{r=2}} = \frac{\begin{bmatrix} -1.63 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 10,000 \\ 0 \end{Bmatrix}}{-4^2 \times 365.69 + 95738} = \frac{-16300}{89886.96} = -0.18$$

式 (3.50) より

$$\begin{aligned}\{A\} &= \xi_{r=1}\{\phi_1\} + \xi_{r=2}\{\phi_2\} = \xi_{r=1} \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{12} = 1 \end{Bmatrix} + \xi_{r=2} \begin{Bmatrix} \phi_{21} \\ \phi_{22} = 1 \end{Bmatrix} \\ &= 2.02 \begin{Bmatrix} 0.62 \\ 1 \end{Bmatrix} + (-0.18) \begin{Bmatrix} -1.63 \\ 1 \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

式 (3.52) より

$$\begin{aligned}\{A\} \sin \omega t &= \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \sin 4t = [\xi_1\{\phi_1\} + \xi_2\{\phi_2\}] \sin 4t \\ &= 2.02 \begin{Bmatrix} 0.62 \\ 1 \end{Bmatrix} \sin 4t + (-0.18) \begin{Bmatrix} -1.63 \\ 1 \end{Bmatrix} \sin 4t\end{aligned}$$

したがって

$$x_1 = 1.25 \sin 4t + 0.29 \sin 4t = 1.54 \sin 4t \text{ [m]}$$

$$x_2 = 2.02 \sin 4t - 0.18 \sin 4t = 1.84 \sin 4t \text{ [m]}$$

減衰比 $\zeta = 0$ であり，外力の角振動数は 1 次モードの共振点（例題 2.2 参照）以下であるから，定常振動において入力と応答の位相差はない。

（解説）

同様に $\omega = 20$ [rad/s] として $10,000 \sin 20t$ [N] の周期外力を与えたときについて考えてみよう。

$$\begin{aligned}\xi_{r=1} &= \frac{\{\phi_1\}^T \{F\}}{-\omega^2 m_{r=1} + k_{r=1}} = \frac{[0.62 \ 1] \begin{Bmatrix} 10,000 \\ 0 \end{Bmatrix}}{-20^2 \times 138.44 + 5288} = \frac{6200}{-50088} = -0.124 \text{ [m]} \\ \xi_{r=2} &= \frac{\{\phi_2\}^T \{F\}}{-\omega^2 m_{r=2} + k_{r=2}} = \frac{[-1.63 \ 1] \begin{Bmatrix} 10,000 \\ 0 \end{Bmatrix}}{-20^2 \times 365.69 + 95738} = \frac{-16300}{-50538} = 0.18 \text{ [m]}\end{aligned}$$

式 (3.50) と式 (3.52) より

$$\begin{aligned}\{A\} \sin \omega t &= \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \sin 20t = [\xi_1\{\phi_1\} + \xi_2\{\phi_2\}] \sin 20t \\ &= -0.124 \begin{Bmatrix} 0.62 \\ 1 \end{Bmatrix} \sin 20t + 0.18 \begin{Bmatrix} -1.63 \\ 1 \end{Bmatrix} \sin 20t\end{aligned}$$

したがって

$$x_1 = -0.076 \sin 20t - 0.29 \sin 20t = -0.366 \sin 20t \text{ [m]} = 0.366 \sin(20t - \pi) \text{ [m]}$$

$$x_2 = -0.124 \sin 20t + 0.18 \sin 20t = 0.056 \sin 20t \text{ [m]}$$

減衰比 $\zeta = 0$ であるが，外力の角振動数は，2 次モードの共振点（例題 2.2 参照）より高いので，質量 m_1 は外力と逆相， m_2 は外力と位相差はない。結局，周期外力の固有角振動数が 4 [rad/s] のときは， x_1 と x_2 は同相であるが，20 [rad/s] の場合には x_1 と x_2 は逆相になることが読み取れる。

第 4 章

(4.1)

- ① 伝達関数の名称：ボード線図
- ② 片持ち梁の 1 次モードを上 に 2 次モードの図を下に描く．また，概略図に A 部（励振点）と B 部を指示する（図 K.11）．

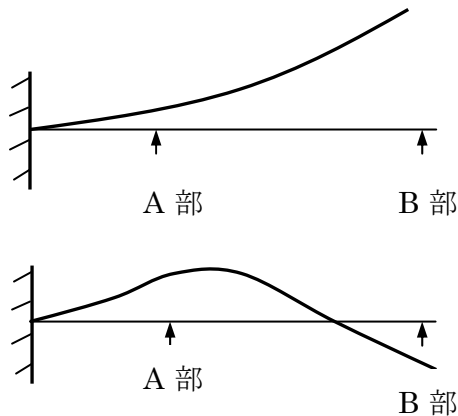


図 K.11

- ③ 伝達関数 a, b, c, d について
式 (4.23) より

$$|G(\omega)_{il}|_{max} = \frac{1}{K_r} \frac{1}{2\zeta_r \sqrt{1 - \zeta_r^2}} \cong \frac{1}{2K_r \zeta_r} = \frac{1}{2\zeta_r} \frac{\phi_{ri} \phi_{rl}}{k_r}$$

$G(\omega)_{il}$: 伝達関数 (i 点を励振, l 点の応答を観測)

$\phi_{ri} \phi_{rl}$: 固有モード (i 点と l 点の r 次モード)

ζ_r : r 次モードの減衰比

(1) A 部を加振して, A 部の応答である伝達関数

a 点 : 1 次モードでは, $G(\omega)_{AA(1 \text{ 次モード})} = \frac{1}{2\zeta_1} \frac{\phi_{1A} \phi_{1A}}{k_1}$

b 点 : 2 次モードでは, $G(\omega)_{AA(2 \text{ 次モード})} = \frac{1}{2\zeta_2} \frac{\phi_{2A} \phi_{2A}}{k_2}$

(2) A 部を加振して, B 部の応答である伝達関数

c 点 : 1 次モードでは, $G(\omega)_{AB(1 \text{ 次モード})} = \frac{1}{2\zeta_1} \frac{\phi_{1A} \phi_{1B}}{k_1}$

d 点 : 2 次モードでは, $G(\omega)_{AB(2 \text{ 次モード})} = \frac{1}{2\zeta_2} \frac{\phi_{2A} \phi_{2B}}{k_2}$

④ 周波数 f_1, f_2 について

f_1 : 1 次モードの共振周波数 $f_1 = \omega_{d1}/2\pi \cong \omega_{n1}/2\pi$

f_2 : 2 次モードの共振周波数 $f_2 = \omega_{d2}/2\pi \cong \omega_{n2}/2\pi$

式 (2.73) より

$$\omega_{d1,2} = \omega_{n1,2} \sqrt{1 - \zeta_{1,2}^2}$$

(4.2)

各次モードシェープは、伝達関数の虚数部のピークをつなぎ合わせて得られる。
したがって、概略の振動モードは、**図 K.12** の太い連続曲線で示される。

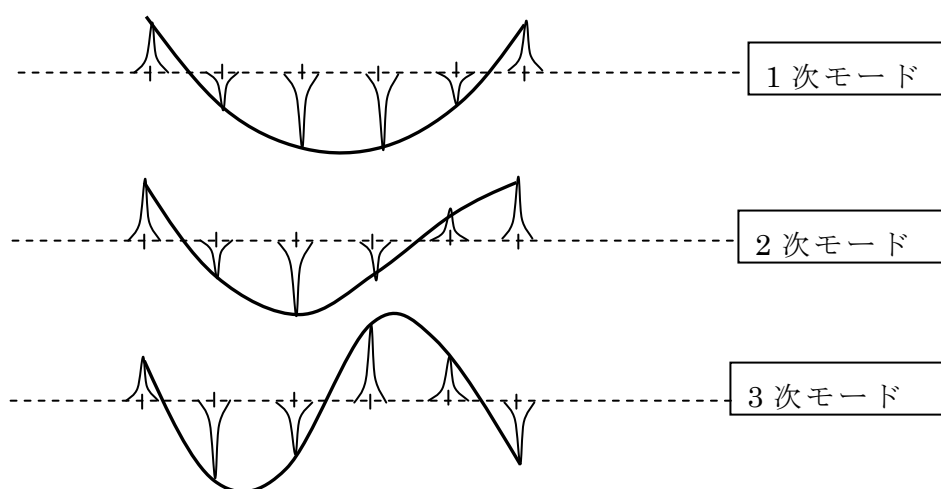


図 K.12

第 5 章

(5.1)

① プロペラ翼の振動：強制振動の場合と自励振動の場合とがある。

回転系の不つり合い、プロペラ駆動軸のトルク変動に起因する場合は、強制振動であり駆動軸の回転次数と振動の関係を調べる必要がある。一方、高い周波数で空気の速度が速い場合にはフラッタを生じ負の減衰状態となり自励振動に分類される。

② 自動車の前輪の左右方向振動（シミ）：強制振動の場合と自励振動の場合とがある。

前輪と同軸で回転するタイヤ、ハブ、ブレーキドラム（ディスク）等の不つり合いに起因する振動で、特に左右輪の不つり合いが逆位相関係になったとき大きな振

動となる。これは低車速でも生じる強制振動であり不つり合い対策等で解消する。一方、高車速で生じる、車輪が左右（向き）、上下、横方向の運動が連成し回転体にジャイロ作用によって振動（シミー）が継続される場合は自励振動である。前輪系を含む操舵系のガタ（間隙）を小さくすることにより操舵系の大きい慣性モーメントにつないで振動を抑制する方法や、さらに操舵系のギヤ比を高くして慣性モーメントを大きくすることや、前輪回りに摺動抵抗を与える等の対策が取られている。独立懸架の場合には左右輪の連成がなくなり、シミーは発生しにくい。

③ 自動車の乾燥式クラッチのすべり時に生じる駆動系のねじり振動：自励振動
運転手の足の動きでコントロールする乾燥式クラッチは、いわゆる半クラッチ時において駆動系のねじり振動が表れるときがある。駆動系のねじり1次モードの固有振動数はトランスミッションのギヤ位置によって固有の値をもつ。この振動原因は乾燥クラッチ板に張られたフェーシングと呼ばれる摩擦材の負性抵抗による自励振動である。一般的には摩擦特性の改善が対策として行われる。

④ 自動車のブレーキ（主制動装置）の作動時のブレーキ鳴き：自励振動
タイヤを取り付けるディスクホイールのなかに車輪と一体となって回転するブレーキドラムまたはブレーキディスクが装着され、一方車体側の車軸受け箱と一体として取り付けられているブレーキアンカーにブレーキシューまたはブレーキパッドが装着されている。ブレーキシューやブレーキパッドにはブレーキドラムやブレーキディスクの摺動面と接触し、制動力を生じるようにライニングが取り付けられている。このライニングの摩擦特性はしばしば負性抵抗の特性を表し、自励振動を生じる。振動系はブレーキドラム、ブレーキディスクとブレーキシュー、ブレーキパッドとの共振があげられる。ブレーキ装置を取り付けるアンカーブラケットの振動特性も関与する場合もある。対策には、ライニングの摩擦特性の改良の他、振動系の共振防止等が取られている。このような連続体の振動の共振は接触している振動体同士の腹と節が共振周波数を同じにして、一致している場合がある。腹と節のモードの一致を防ぐことも振動抑制につながる。

⑤ 飛行機翼の振動（フラッタ）：自励振動
翼の上下振動とねじり振動の相互作用により空気の流れをエネルギー源とする自励振動を起こす。また翼の曲げ振動と補助翼のはばたき振動の連成による自励振動もある。このようにいろいろな運動について完全につり合いをとることが必要にな

る。具体的な対応は空気力学の専門書を参考とされたい。

- ⑥ 回転機械の回転軸にキー溝，あるいは扁平軸をもつ場合に生じる二次的危険速度：自励振動

たとえば，1箇所キー溝がある円形軸の場合には軸の慣性モーメントは2つあり1/4回転ごとに慣性モーメントは最大と最小を繰り返す。したがって，軸のばね定数は回転数の2倍で変化するため，軸を含めた回転体の固有振動数(主危険速度)の1/2の回転速度で自励振動を生じる。この場合軸のばね定数が変化することにより振動が生じるので，自励振動のうちのパラメータ励振である。

- ⑦ 回転機械の軸受に用いられているベアリングの損傷による振動：強制振動

ベアリングは時として，ヘルツ応力による転動疲労を起こしフレーキング等の痕状を生じる場合がある。この痕状がベアリング回転の強制入力として働き，騒音の問題となる場合もある。

- ⑧ 回転機械に取り付けられた円板の偏心による振動：強制振動

回転円板の偏心(質量の不つき合い)がある場合には，強制力として不つき合い質量による遠心力が発生し，回転体の横曲げ固有角振動数に等しい回転速度になるとき，共振現象を示す。これを(主)危険速度と呼ぶ。軸長を短くして横曲げの固有角振動数を上げることや，偏心量を小さくすることなどが対策として取られる。

- ⑨ 回転機械の回転体の横置きによる重力の影響による二次的な危険速度：強制振動

質量不つき合いの円板が軸を水平状態で取り付けられている場合，不つき合い質量による遠心力の他に重力の影響を受け，この強制加振力の角振動数と軸系の横曲げ固有角振動数が一致すると共振現象を表す。共振点の強制加振力の角振動数は横曲げ固有角振動数の1/2である。これを二次的な危険速度と呼ぶ。

- ⑩ 電線に風が当たることによる風切り音：自励振動

流体が円筒形物体に当たるとそのあとに流れが巻き込まれて渦が生じる。レイノルズ(Reynolds)数に関連して層流から乱流に変化するときに生じ，これをカルマン(Kármán)渦と呼ぶ。この渦により電線が振動する場合にも，あるいは電線が振動しなくても音は発生するといわれている。このように一定速度の層流を流すことによっても，振動が発生することになる自励振動である。

- ⑪ 自動車が走行するときに路面の凹凸から受ける振動：強制振動

路面の凹凸はそれ自体が空間周波数をもつことになるが、自動車が走行することにより、走行速度によりタイヤが路面から受ける強制振動入力（周波数）となる。強制振動入力（周波数）が懸架装置を含めた自動車ボディ、自動車の各種装置や各種部品の固有振動数に一致する場合、一致する装置あるいは部材、部品等が共振現象を表す。

⑫ 歯車装置における歯車のかみ合い騒音：強制振動

歯車のかみ合い騒音は歯車のピッチ誤差、歯形誤差、歯溝の振れ、歯筋方向誤差、それらを総合したかみ合い精度、歯あたり等に影響される歯車の歯と歯が当たる騒音であるため、強制振動である。また、かみ合い精度等が良くても、歯車を回転させる軸への入力に変動がある場合にも騒音につながる。歯が疲労してスコアリングやピッチングを生じている場合には、さらに大きな騒音を発生する。

⑬ 内燃機関のシリンダ内の燃焼による内燃機関の軸まわりの振動：強制振動

内燃機関のピストン、コネクティングロッド、クランクシャフト等の運動部分の回転質量慣性力や往復質量慣性力およびそれぞれの慣性偶力のアンバランスが強制加振力となるほか、トルク自体の変動が強制加振力となる。振動系はクランクシャフトのねじれ、曲げ、ピストンとシリンダのスラッピング（叩き）などがあげられる。その振動はさらにエンジンマウント系に伝わり、内燃機関のローリング、ピッチング、バウンシング等の振動となる。振動対策にはクランクシャフトの静的および動的バランスウェイトや多気筒として総合的なトルク変動を減少させる他、クランクダンパーやフライホイールを取り付ける等、多くの装置や方策が盛り込まれている。なお、ピストン・クランク軸系のねじり振動はクランク回転角に連動する慣性モーメントの変動となり、自励振動（パラメータ励振）である。

⑭ 乾性摩擦での平軸受（すべり軸受）の隙間に起因する軸振動：自励振動

隙間の多い軸受の中の軸が何かの原因で隙間の一方へ偏ると、軸受の摩擦力を受けるため、軸回転と反対方向の接線方向力となり、軸は旋回を始める。軸は軸受案内の中心にあり、接触していなければ軸は安定である。一度触れることによって生じる不安定振動であり、自励振動である。この現象を **shaft whipping** と呼ぶ。

《補足》

潤沢に潤滑された平軸受の場合でも、軸の回転角速度に比較して軸の軸受まわりには遅い旋回があるときに、潤滑油の減衰作用は負性抵抗を示し、自励振動を生じる

ことが知られている。

第 6 章

(6.1)

矩形波の場合、 $-\pi/2 \sim \pi/2$ で $f(x) = a$ であり、 $\pi/2 \sim 3\pi/2$ で $f(x) = -a$ である。
よって、式 (6.11)、式 (6.9)、式 (6.10) より

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} f(x) dx$$
$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} f(x) \cos mx \cdot dx \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$
$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} f(x) \sin mx \cdot dx \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

ただし $f(x)$ は定数であり、のこぎり波のように部分積分を行う必要はない。
したがって

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a dx + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (-a) dx \right\} = 0$$
$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} f(x) \cos mx \cdot dx = \frac{1}{\pi} \left\{ a \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos mx \cdot dx - a \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos mx \cdot dx \right\}$$
$$= \frac{1}{\pi} \left\{ a \left[\left(\frac{1}{m} \sin mx \right) \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} - a \left[\frac{1}{m} \sin mx \right]_{\pi/2}^{3\pi/2} \right\}$$
$$= 0 \quad (m \text{ は偶数のとき})$$
$$= \frac{4a}{\pi m} \quad (m \text{ は奇数のとき})$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a \sin x \cdot dx + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (-a) \cdot \frac{1}{m} \cos x \cdot dx \right\} = 0$$

したがって

$$f(x) = \frac{4a}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right)$$

第 7 章

(7.1)

a 点について：

コヒーレンスは低いが，伝達関数から反共振点の現象である．したがって，反共振では入力に対しての振動系の反応は生じないので，コヒーレンスは低いが生計測において問題はない．

b 点について：

コヒーレンスも低い，伝達関数からみて共振点と思われる．したがって，b 点の振動周波数に関して，入力と振動体に線形性がない場合が考えられる．構造物が非線形性をもつ場合の応答周波数は振幅も位相も無相関になるからである．あるいは，実験現場に b 点の周波数に近いノイズや暗騒音が混入した可能性もある．打撃ハンマの先端チップの硬度選択の誤り，応答にハンマリング以外の入力が入力混入している，リーケージ（漏れ）が生じていることもあるなどが考えられる．実験現場の状況や，リーケージの場合には用いた窓関数を確認する必要がある．打撃加振の場合には精度向上のために，不規則打撃加振法を行う．

(7.2)

(単位)インパルス入力を受けた振動系は，自由振動を生じる(7.4(3)項参照)．

したがって，運動方程式は

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

x について解くと，第 1 章「はじめに(2)」または，式(2.16)，式(2.17)の減衰比 $\zeta = 0$ において

$$x = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2 + A_0^2} \sin(\omega_n t + \varphi)$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{A_0 \omega_n}{v_0}\right)$$

ここで，初期条件を求め， v_0 ， A_0 ， φ を定める．

いま， $m\ddot{x} = F$ より， $[m\dot{x}]_0^{\Delta t} = \int_0^{\Delta t} F dt$

この式は質量と速度の積であり運動量の変化である力積である． $\Delta t = \varepsilon$ のとき $\int_0^{\Delta t} F dt = 1$ を選ぶと初期条件は， $t = 0$ のとき， $x = A_0 = 0$ ， $m\dot{x} = mv_0 = 1$ ， $\varphi = 0$ と

なる. $-kx$ はインパルスに対する寄与は時間 Δt では無視する.

したがって, 初期条件より $A_0 = 0$, $v_0 = 1/m$ として,

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_n} \sin \omega_n t$$

$$\text{ただし, } \omega_n = \sqrt{k/m}$$

この $x(t)$ を「単位インパルスに対する反応関数(unit impulse response function)」
という.

(補足)

本問の振動系に単位跳躍関数(ステップ入力)が加えられた場合を考える.

運動方程式は

$$m\ddot{x} + kx = I(t)$$

式(3.11)のように一般解は右辺=0の基本解と右辺= $I(t)$ の特解の和であるから,

$$x(t) = X_1 \sin \omega_n t + X_2 \cos \omega_n t + \frac{1}{k}$$

初期条件 $t = 0$, $x = 0$, $\dot{x} = 0$ より, $X_1 = 0$, $X_2 = -(1/k)$ が定められる. よって

$$x(t) = \frac{1}{k}(1 - \cos \omega_n t)$$

単位跳躍関数に対する応答 $x(t)$ はインディシャル・アドミッタンス(indicial admittance)と呼ぶ.

第 8 章

(8.1)

2自由度系であるから1次と2次モードが観測される. 観測点を質点1におき, 質点1, 2を順次加振していくこととする. 1次, 2次の固有モードに対し等価剛性 $K_{(r=1, 2)}$ が固有モードとの関係からそれぞれ求められる. 等価剛性 $K_{(r=1, 2)}$ に加振点 i , 観測点 l の記号を付し, $K_{(r=1, 2)il}$ (加振点 $i=1, 2$; 計測点 $l=1$) とおく.

いま点 i を力の振幅 F_i で励振するときの点 l での応答振幅を考え, 固有モード $\{\phi_{(r=1, 2)}\}$ のうち点 i と点 l の成分(等価剛性) $K_{(r=1, 2)il}$ をそれぞれ $\phi_{(r=1, 2)i}$, $\phi_{(r=1, 2)l}$ を用いて表現すると, 式(4.4)より

$$K_{(r=1, 2)il} = \frac{k_{(r=1, 2)}}{\phi_{(r=1, 2)i}\phi_{(r=1, 2)l}}$$

つまり

$$K_{(r=1, 2)i=1, l=1} = \frac{k_{(r=1, 2)}}{(\phi_{(r=1, 2)i=1})^2}$$

および

$$K_{(r=1, 2)i=2, l=1} = \frac{k_{(r=1, 2)}}{\phi_{(r=1, 2)i=2}\phi_{(r=1, 2)l=1}}$$

固有モードは振幅比であるから、いま、仮に $\phi_{(r=1, 2)i=1}$ を基準値 (=1) とおくと

$$\phi_{(r=1, 2)i=1} = 1$$

$$\phi_{(r=1, 2)i=2} = \frac{K_{(r=1, 2)i=1, l=1}}{K_{(r=1, 2)i=2, l=1}}$$

と得られる。 $\phi_{(r=1, 2)i=1}$ と $\phi_{(r=1, 2)l=2}$ を正規化すると（正規化を便宜的に $\phi_{(r=1, 2)i=1}^*$ と $\phi_{(r=1, 2)l=2}^*$ で示す）

正規化とはベクトルの大きさを 1 にすることをいう。ベクトルの直交座標構成値を元のベクトルの大きさで除し求められる。 $\phi_{(r=1, 2)i=1}^*$ の場合は、

$$\phi_{(r=1, 2)i=1}^* = \frac{\phi_{(r=1, 2)i=1}}{\sqrt{K_{(r=1, 2)i=1, l=1}^2 + K_{(r=1, 2)i=2, l=1}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{K_{(r=1, 2)i=1, l=1}}{K_{(r=1, 2)i=2, l=1}}\right)^2}}$$

$$\phi_{(r=1, 2)i=1}^* = 1/\sqrt{1 + \left(K_{(r=1, 2)i=1, l=1}/K_{(r=1, 2)i=2, l=1}\right)^2}$$

$$\phi_{(r=1, 2)i=2}^*$$

$$= \left(K_{(r=1, 2)i=1, l=1}/K_{(r=1, 2)i=2, l=1}\right)/\sqrt{1 + \left(K_{(r=1, 2)i=1, l=1}/K_{(r=1, 2)i=2, l=1}\right)^2}$$

すなわち、1次モードの質点1と質点2のモードはそれぞれ

$$\phi_{(r=1)i=1}^* = 1/\sqrt{1 + \left(K_{(r=1)i=1, l=1}/K_{(r=1)i=2, l=1}\right)^2}$$

$$\phi_{(r=1)i=2}^* = \left(K_{(r=1)i=1, l=1}/K_{(r=1)i=2, l=1}\right)/\sqrt{1 + \left(K_{(r=1)i=1, l=1}/K_{(r=1)i=2, l=1}\right)^2}$$

2次モードの質点1と質点2のモードはそれぞれ

$$\phi_{(r=2)i=1}^* = 1/\sqrt{1 + \left(K_{(r=2)i=1, l=1}/K_{(r=2)i=2, l=1}\right)^2}$$

$$\phi_{(r=2)i=2}^* = \left(K_{(r=2)i=1, l=1}/K_{(r=2)i=2, l=1}\right)/\sqrt{1 + \left(K_{(r=2)i=1, l=1}/K_{(r=2)i=2, l=1}\right)^2}$$

として求められることになる。

第 9 章

(9.1)

回転次数 2 次で回転速度の低い方から高い方まで振動が発生しており、回転機械における回転 2 次の加振源が推測される。振動系は回転 1 次では 500rpm、回転次数 2 次では 250rpm、回転次数 3 次では 167rpm、回転次数 4 次では 125rpm の回転速度において共振点が観測される。各次数での回転速度を周波数に換算し、回転 1 次から回転 4 次までを記すと

$$(500/60) \times 1 = (250/60) \times 2 = (167/60) \times 3 = (125/60) \times 4 = 8.33\text{Hz}$$

である。

したがって、この回転機械は回転 2 次の加振源をもち、振動系の共振周波数は 8.33Hz であると推測される。

外力が働く場合には、その外力の周波数とそのいくつか倍である振動体の固有周波数で振動モードが表れることになる。

(9.2)

車輪軸は単位インパルス入力により、車輪軸の固有周波数 $f_1 = 480[\text{Hz}]$ で自由振動を励振される。その周期 T_1 は $T_1 = 1/f_1$ である。一方、車輪の回転速度を $N[\text{rpm}]$ とおくと、1 回転に 1 回の単位インパルス入力の周波数 f_2 は $f_2 = N/60[\text{rps}]$ であり、周期 T_2 は $T_2 = 1/f_2 = 60/N$ となる (図 K.13)。

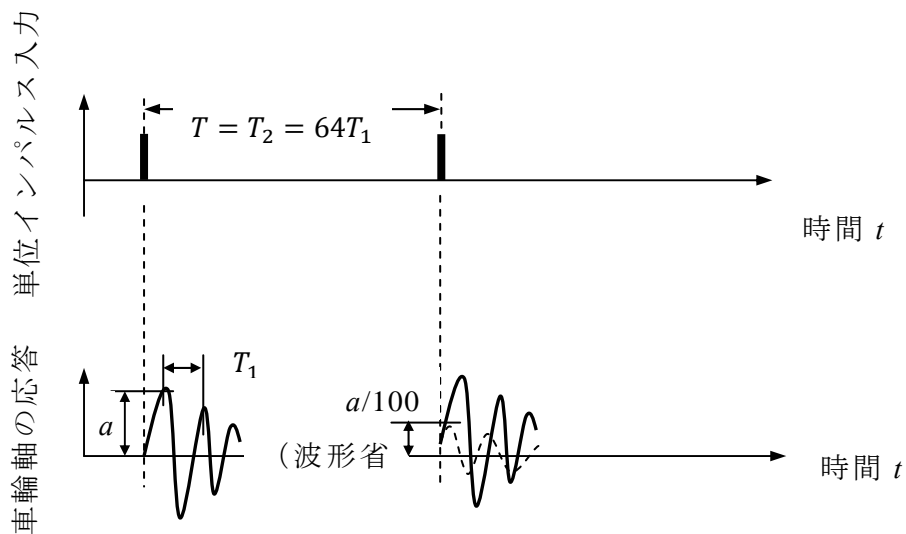


図 K.13

車輪軸は 1 回の単位インパルス入力でその振動は 0.2 秒で消失するから、車輪への単位インパルス入力は車輪軸振動 96cycle (= 480[cycle/s] × 0.2[s]) 以内に再び単位インパルスが入力されなければならない。これより

$$N > 300[\text{rpm}] = (480[\text{cycle/s}] / 96 [\text{cycle}])[\text{rps}]$$

でなければならない。

さらに振動は対数減衰率 δ に従うから、式 (2.21) より

$$\delta = \frac{1}{m} \ln \frac{a_n}{a_{n+m}}$$

上式に $m = 96$, $a_n = 1$, $a_{n+m} = 1/1000$ を代入して、対数減衰率 $\delta = 0.072$ が求められる。

したがって、同様に $a_{n+m} = 1/100$ のときのサイクル数 m_x を求めると

$$0.072 = \frac{1}{m_x} \ln \frac{1}{(1/100)}$$

より $m_x = 64$ が得られる。

また、 n_1 , n_2 を互いに素数の整数とにおいて、 $n_1 T_1 = n_2 T_2 = T$ が成立すると、2つ (単位インパルス入力と車輪軸の振動) の振動は周期 T で合成されるから

$$n_1 \cdot \frac{1}{480} = n_2 \frac{60}{N}$$

$$N = \frac{n_2}{n_1}(60 \times 480)$$

$n_2 = 1$, $n_1 = m_x = 64$ は互いの素数であり, そのとき N は 450rpm であり最小の回転速度となる. つまり, 車輪の回転速度が 450rpm のとき車輪軸の固有周波数 (周期 $T = T_2 = 64T_1$) と同期する.

《補足》

角振動数が異なる 2 つの振動が合成された場合の振動は, その 2 つの振動の周期 T_1 と T_2 の場合を想定する. 互いに素である整数値 (2 つの整数が 1 と 1 以外に共通の約数をもたない場合の関係で, つまり 2 つの整数の最大公約数が 1 の場合) を n_1 , n_2 とする. このとき $n_1T_1 = n_2T_2 = T$ が成り立てば, 2 つの振動は周期 T にて合成される周期振動となる. また, $n_2/n_1 = T_1/T_2$ は有理数 (分数で表すことができる) である. これ以外つまり無理数 ($\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, π など) の場合には周期振動にはならない.