

付録 A 1 自由度系（自由振動）の解法

はじめに

振動現象を解明するのに基本となる 1 自由度不減衰系（自由振動）の運動方程式の作成方法とその微分（あるいは偏微分）方程式の解法を説明する。

1 自由度系モデルには、単振動のばね - 質量モデルと数学振子を用いる。

A.1 運動方程式（微分方程式）を立てる

A.1.1 ばね - 質量の場合

(1) 単振動の運動から運動方程式を求める

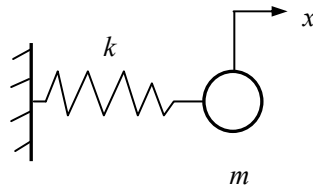


図 A.1 単振動（ばね - 質量）（ x 軸）

単振動を想定して、次の式 (A.1) とおく。

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (\text{A.1})$$

したがって

$$\dot{x}(t) = A \omega \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= -A \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) \\ &= -\omega^2 x(t) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

いま、ニュートンの運動方程式により次式が求められる。

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) \quad (\text{A.4})$$

式 (A.4) に式 (A.3) を代入すると

$$-m\omega^2 x(t) = -kx(t) \quad (\text{A.5})$$

よって

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{A.6})$$

を求められる.

解 (式 (A.1)) を想定して始めたので, 運動方程式 (微分方程式) の作成 (式 (A.4)) と同時に解 (式 (A.6)) が得られる.

(2) レイリーの方法 (最大の運動エネルギー = 最大の位置エネルギー)

運動のエネルギーと位置のエネルギーをそれぞれ T , U とおくと

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad (\text{A.7})$$

$$U = \frac{1}{2} k x^2 \quad (\text{A.8})$$

$$x = A \sin \omega_n t \quad (\text{A.9})$$

とおけば

$$T_{max} = \frac{1}{2} m A^2 \omega_n^2 \quad (\text{A.10})$$

$$U_{max} = \frac{1}{2} k A^2 \quad (\text{A.11})$$

式 (A.10) = 式 (A.11) より

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{A.12})$$

の不減衰固有角振動数が式 (A.6) と同様に, 式 (A.12) が求められる. この場合には「力学的エネルギー保存の法則」を用いている. 運動方程式は, 次に述べるラグランジュの方程式から求める.

(3) ラグランジュの運動方程式から求める

後述の式 (A.23) に詳述するラグランジュの運動方程式を次式に示す.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) + \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.13})$$

前述の式 (A.7) と式 (A.8) から, 次の式 (A.14) と式 (A.15) を得る.

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} \quad , \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{d}{dt} (m \dot{x}) = m \ddot{x} \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = kx \quad (\text{A.15})$$

式 (A.14) と式 (A.15) を式 (A.13) へ代入すると

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (\text{A.16})$$

このように、式 (A.4) と同じく微分方程式、式 (A.16) が求められる。

ラグランジュの運動方程式の座標は直線座標でも角座標（一般座標）でもよい。

A.1.2 単振り子（数学振り子）の場合

(1) 一般座標の円弧の接線方向のつり合いから求める

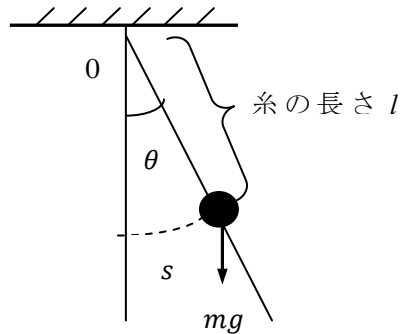


図 A.2 単振り子（一般座標）

円弧 s の接線方向において、ニュートンの運動方程式から、次式が求められる。

$$m\ddot{s} = -mg \sin \theta \quad (\text{A.17})$$

$\sin \theta \cong \theta$ ならば

$$mg \cdot \frac{s}{l} + m\ddot{s} = 0 \quad (\text{A.18})$$

しかるに

$$\ddot{s} + \frac{g}{l}s = 0 \quad (\text{A.19})$$

結局、 $s = l\theta$ から式 (A.4) と同じく微分方程式、式 (A.19) を得る。

(2) ラグランジュの方程式から求める

$$\text{運動のエネルギー} \quad T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \quad (\text{A.20})$$

$$\text{位置のエネルギー} \quad U = mgh = mg(l - l\cos\theta) \quad (\text{A.21})$$

ここでラグランジュの運動方程式を用いる。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{A.22})$$

いま

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) + \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{A.23})$$

であるから

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \dot{\theta} \quad , \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{d}{dt} (ml^2 \dot{\theta}) = ml^2 \frac{d\dot{\theta}}{dt} = ml^2 \ddot{\theta} \quad (\text{A.24})$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{d(mgl - mgl \cos \theta)}{d\theta} = mgl \sin \theta \quad (\text{A.25})$$

式 (A.24) と式 (A.25) を式 (A.23) へ代入すると

$$ml^2 \ddot{\theta} + mgl \sin \theta = 0 \quad (\text{A.26})$$

$\sin \theta \cong \theta$ の場合

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0 \quad (\text{A.27})$$

を得る.

しかるに, 式 (A.4), 式 (A.19) と同じく微分方程式, 式 (A.27) が求められる.

なお, ラグランジュの式は非保存的力学系にも次の式で示される.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad (\text{A.28})$$

D は散逸関数.

(3) 単振子の運動をデカルト座標 (x, y の直交座標) から求める

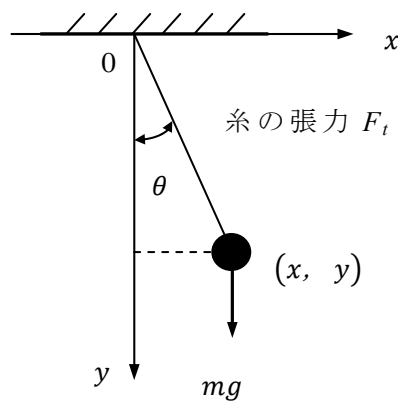


図 A.3 単振子 (デカルト座標)

x, y 座標からニュートンの運動方程式より, 式 (A.29), 式 (A.30) が成立する.

$$m\ddot{x} = -F_t \sin \theta \quad (\text{A.29})$$

$$m\ddot{y} = mg - F_t \cos \theta \quad (\text{A.30})$$

ただし，糸の張力 F_t とおく．

式 (A.29) $\times \cos\theta$ ， 式 (A.30) $\times \sin\theta$ により

$$m \cos\theta \ddot{x} = -F_t \sin\theta \cos\theta \quad (\text{A.31})$$

$$m \sin\theta \ddot{y} = mg \sin\theta - F_t \sin\theta \cos\theta \quad (\text{A.32})$$

式 (A.31) - 式 (A.32) より

$$m \cos\theta \ddot{x} - m \sin\theta \ddot{y} = -mg \sin\theta \quad (\text{A.33})$$

$$\left(\begin{array}{c} \sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \\ \text{参考：公式} \\ y = f(z) , \quad z = g(x) \text{ なるとき,} \\ \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx} = f'(z)g'(x) \\ \text{また,} \\ \frac{d}{dx} \{u(x) \cdot v(x)\} = \frac{du}{dx} v + u \frac{dv}{dx} \\ \sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \end{array} \right)$$

いま， $x = l \sin\theta$ であるから，時間 t で 2 回微分すると（上記公式参照）

$$\frac{dx}{dt} = l \left\{ \frac{d(\sin\theta)}{dt} \right\} = l \frac{d\theta}{dt} \cos\theta \quad (\text{A.34})$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = l \left\{ \frac{d^2\theta}{dt^2} \cos\theta + \frac{d\theta}{dt} \frac{d(\cos\theta)}{dt} \right\} = l \left(\frac{d^2\theta}{dt^2} \cos\theta - \frac{d\theta}{dt} \frac{d\theta}{dt} \sin\theta \right) \quad (\text{A.35})$$

また， $y = l \cos\theta$ であるから，同様に

$$\frac{dy}{dt} = l \left\{ \frac{d(\cos\theta)}{dt} \right\} = -l \frac{d\theta}{dt} \sin\theta \quad (\text{A.36})$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -l \left\{ \frac{d^2\theta}{dt^2} \sin\theta + \frac{d\theta}{dt} \frac{d(\sin\theta)}{dt} \right\} = -l \left(\frac{d^2\theta}{dt^2} \sin\theta + \frac{d\theta}{dt} \frac{d\theta}{dt} \cos\theta \right) \quad (\text{A.37})$$

式 (A.35) と式 (A.37) を書き直すと

$$\ddot{x} = -l\dot{\theta}^2 \sin\theta + l\ddot{\theta} \cos\theta \quad (\text{A.38})$$

$$\ddot{y} = -l\dot{\theta}^2 \cos\theta - l\ddot{\theta} \sin\theta \quad (\text{A.39})$$

式 (A.38) と式 (A.39) を式 (A.33) へ代入

$$m \cos\theta (-l\dot{\theta}^2 \sin\theta + l\ddot{\theta} \cos\theta) + m \sin\theta (-l\dot{\theta}^2 \cos\theta - l\ddot{\theta} \sin\theta) = -mg \sin\theta \quad (\text{A.40})$$

$$ml\ddot{\theta}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = -mg \sin\theta \quad (\text{A.41})$$

$$l\ddot{\theta} = -g\sin\theta \quad (\text{A.42})$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \quad (\text{A.43})$$

ここで、 $\sin\theta \cong \theta$ ならば

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \quad (\text{A.44})$$

結局、式 (A.4) と同様に微分方程式、式 (A.44) を得ることができる。

[参考 1] 糸の張力を求める

ここで参考のため、図 A.3 の糸の張力を求める。

糸の張力は F_t である。

① 法線方向 (遠心力とのつり合い)

$$m\frac{v^2}{l} = F_t - mg\cos\theta \quad (\text{A.45})$$

いま、 $v = l\frac{d\theta}{dt}$ より

$$F_t = m\left\{g\cos\theta + l\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\} \quad (\text{A.46})$$

② 接線方向

$$m\frac{dv}{dt} = -mg\sin\theta \quad (\text{A.47})$$

$v = l\frac{d\theta}{dt}$ より、左辺に v 、右辺に $l\frac{d\theta}{dt}$ を乗じる

$$v\frac{dv}{dt} = -lg\sin\theta \cdot \frac{d\theta}{dt} \quad (\text{A.48})$$

よって両辺に dt を乗じて両辺それぞれ積分すると

$$\int v dv = -lg \int \sin\theta d\theta \quad (\text{A.49})$$

$$v^2 = 2lg\cos\theta + C \quad (C \text{ は積分定数}) \quad (\text{A.50})$$

ここで $\theta = 0$ のとき $v = v_0$ とする

$$v_0^2 = 2gl + C \quad (\text{A.51})$$

したがって

$$v^2 = v_0^2 - 2lg(1 - \cos\theta) \quad (\text{A.52})$$

③ 糸の張力

座標 (x, y) において

$$y = l(1 - \cos\theta) \quad (\text{A.53})$$

したがって

$$v^2 = v_0^2 - 2gy \quad (\text{A.54})$$

これにより，式 (A.46) は

$$\begin{aligned} F_t &= m \left\{ g \cos\theta + l \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right\} = \frac{m}{l} (lg \cos\theta + v^2) \\ &= \frac{m}{l} (v_0^2 - 2gl + 3gl \cos\theta) \\ &= \frac{m}{l} \{v_0^2 + g(l - 3y)\} \\ &\quad (\text{また, 公式 } 1 - \cos\theta = 2\sin^2 \frac{\theta}{2} \text{ より}) \\ &= mg \left(\frac{v_0^2}{gl} + 1 - 6\sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

として得られる.

ただし, $\theta > \pi/2$ のときは糸がたるむので, 式 (A.55) の成立は $\theta \leq \pi/2$ の場合である.

ちなみに, 振子を水平 ($\theta = \pi/2$) の位置で静止させ, 静かに放した場合の最下点 (y 軸上) に来たときの糸の張力は $\theta=0$ を式 (A.55) に代入し, $v_0 = \sqrt{2gl}$ であるから

$$F_t = 3mg$$

となる.

[参考 2] 二重振子

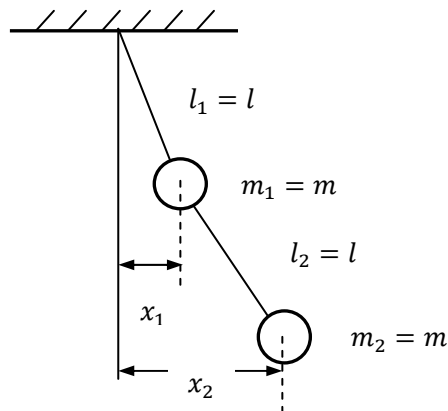


図 A.4 二重振子

長さ $l_1 = l_2 = l$, 質量 $m_1 = m_2 = m$ の単振子を 2 個直列に接続した系の運動方

程式と固有角振動数，固有モードを求める．

まず，運動エネルギー T と位置エネルギー U は

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{m\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m\dot{x}_2^2}{2} \\ U &= 2mg(l - \sqrt{l^2 - x_1^2}) + mg(l - \sqrt{l^2 - (x_2 - x_1)^2}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.56})$$

これより，式 (A.56) を本書の式 (2.119) ラグランジュの運動方程式に当てはめて，

$$\left[\begin{array}{l} \text{ラグランジュの運動方程式は次のとおり} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{array} \right]$$

次の運動方程式が得られる．

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}_1 + \frac{2mgx_1}{\sqrt{l^2 - x_1^2}} - \frac{mg(x_2 - x_1)}{\sqrt{l^2 - (x_2 - x_1)^2}} &= 0 \\ m\ddot{x}_2 + mg \frac{(x_2 - x_1)}{\sqrt{l^2 - (x_2 - x_1)^2}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.57})$$

よって

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l} (2 \pm \sqrt{2})} \quad (\text{A.58})$$

1 次モード

$$\frac{x_1}{x_2} = 0.414 \quad (\text{A.59})$$

2 次モード

$$\frac{x_1}{x_2} = -2.41 \quad (\text{A.60})$$

A.2 運動方程式（微分方程式）を解く

運動方程式が立てられたので，これらの方程式を解く．

(1) 微分方程式を，演算子を用いて解く

単振動の微分方程式を解く．

はじめに，2 階の微分方程式である次の演算子の説明をする．

$$A_1 \frac{d^2x}{dt^2} + A_2x = 0 \quad (\text{A.61})$$

第 2 階微分方程式を解くと次式の公式に当てはまる.

$$x = C_1 e^{D_1 t} + C_2 e^{D_2 t} \quad (\text{A.62})$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{さて, ここで} \\ \frac{d}{dt} = D \quad \text{とおいて, これを演算子と呼ぶ.} \\ \text{式 (A.61) について演算子を用いて書くと} \\ (D^2 + \frac{A_2}{A_1})x = 0 \\ D = \pm j \sqrt{\frac{A_2}{A_1}} \quad (\text{A.63}) \\ \text{である.} \end{array} \right)$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad (\text{A.64})$$

演算子を用いて

$$(D^2 + \frac{k}{m})x = 0 \quad (\text{A.65})$$

よって

$$D = \pm j \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{A.66})$$

$$D_1 = -j \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad D_2 = j \sqrt{\frac{k}{m}}$$

したがって式 (A.62) に当てはめると

$$x = C_1 e^{-j \sqrt{\frac{k}{m}} t} + C_2 e^{j \sqrt{\frac{k}{m}} t} \quad (\text{A.67})$$

ただし, $j^2 = -1$ の虚数単位とする.

式 (A.67) は次のオイラーの公式を利用して正弦波または余弦波に変換する.

$$\left(\begin{array}{c} \text{~~~~~} \\ \text{オイラーの公式} \\ e^{\pm jz} = \cos z \pm j \sin z \\ \text{~~~~~} \end{array} \right)$$

式 (A.67) の実時間 t に対する実現象の変位 x は実数値なので, 虚数部が零であ

るためには、 C_1, C_2 は複素数でなければならない。したがって、 C_1, C_2 を複素数とにおいて、オイラーの公式を用いると

$$x = A_0 \sin(\omega t + \psi) \quad (\text{A.68})$$

ただし

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{A.69})$$

ψ は初期条件により決まる位相、 A_0 は初期条件により決まる振幅として求められる。

不減衰角固有振動数は式 (A.6), 式 (A.12), と同じく、式 (A.69) が得られる。

公式 (A.62) の考え方の説明をする。

2階の微分を行う式 (A.61) が成立するには、その解 x は正弦波 (sin) または余弦波 (cos) あるいは指数導関数以外に存在しない。

式 (A.61) には dx/dt の項が無いので周期振動が確実であり x は正弦波または余弦波と置くことができるが、 dx/dt の項がある場合にも対応できるように、解 x を指数関数と置く。さらに、解は2次方程式から求めるため、2根であるから x は $C_1 e^{D_1 t}$ と $C_2 e^{D_2 t}$ の重ね合わせとする。したがって、解は式 (A.62) と置くことができる。

(2) 微分方程式をラプラス変換により解く

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0 \quad (\text{A.70})$$

の場合について、両辺をラプラス変換を行う

\mathcal{L} : (ラプラス変換記号)

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x\right\} = 0 \quad (\text{A.71})$$

すなわち

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2 x}{dt^2}\right\} + \frac{k}{m} \mathcal{L}\{x\} = 0 \quad (\text{A.72})$$

ここで

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\} = S^2 \mathcal{L}\{x\} - Sx(0) - \dot{x}(0) \quad (\text{A.73})$$

初期条件 $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$ を代入し

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\} = S^2 \mathcal{L}\{x\} - Sx_0 - v_0 \quad (\text{A.74})$$

よって

$$S^2 \mathcal{L}\{x\} - Sx_0 - v_0 + \frac{k}{m} \mathcal{L}\{x\} = 0 \quad (\text{A.75})$$

しかるに

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x\} &= \frac{Sx_0 + v_0}{S^2 + \frac{k}{m}} = \frac{x_0 S}{S^2 + \left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)^2} + \frac{v_0}{S^2 + \left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)^2} \\ &= \frac{x_0 S}{S^2 + \left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)^2} + \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{m}}} \cdot \frac{v_0 \sqrt{\frac{k}{m}}}{S^2 + \left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)^2} \end{aligned} \quad (\text{A.76})$$

ここでラプラス逆変換を行う。

\mathcal{L}^{-1} : (ラプラス逆変換記号)

$$\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}\{x\}] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{x_0 S}{S^2 + \left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)^2} + \frac{v_0 \frac{k}{m}}{S^2 + \left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)^2}\right] = x_0 \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{S}{S^2 + \left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)^2}\right] + \frac{v_0}{\sqrt{\frac{k}{m}}} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{\frac{k}{m}}}{S^2 + \left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)^2}\right] \quad (\text{A.77})$$

ここでラプラスの原関数 $f(t)$ と像関数 $F(S)$ の関係 (ラプラス変換・逆変換) より,

~~~~~

$$\left( \begin{array}{l} \text{参考: ラプラス変換と逆変換} \\ f(t) \equiv F(s) , \quad f(t) \equiv \mathcal{L}^{-1}F(s) \\ f(t) = \cos bt , \quad F(s) = \frac{s}{s^2 + b^2} \\ f(t) = \sin bt , \quad F(s) = \frac{b}{s^2 + b^2} \end{array} \right)$$

~~~~~

$$x = x_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + \frac{v_0}{\sqrt{\frac{k}{m}}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (\text{A.78})$$

ただし

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{A.79})$$

$$\tan\varphi = \frac{x_0\omega_0}{v_0} \quad (\text{A.80})$$

とする.

このように式 (A.78) において変位 x の時間による変化が式 (A.68) と同様に求められる. 不減衰角固有振動数は式 (A.6), 式 (A.12), 式 (A.69) と同じく, 式 (A.79) が得られる.

付録 B いろいろな連続体の振動モードと固有振動数

はじめに

連続体の固有角振動数の算出方法に両端単純支持の梁の横曲げを取り上げ、円板や長方形板などの連続体の固有モードと固有振動数をまとめた。

B.1 梁の横振動

細い梁の横振動を考える。 x 軸上の梁のたわみの変位 y は、距離 x と時間 t の関数として表されるので、これを $y(x, t)$ とおく。梁の長さ l 、断面積 A 、材料の縦弾性係数 E 、断面二次モーメント I とおく。 dx 部分の左側に作用するせん断力 F 、曲げモーメント M とすると（図 B.1 参照）

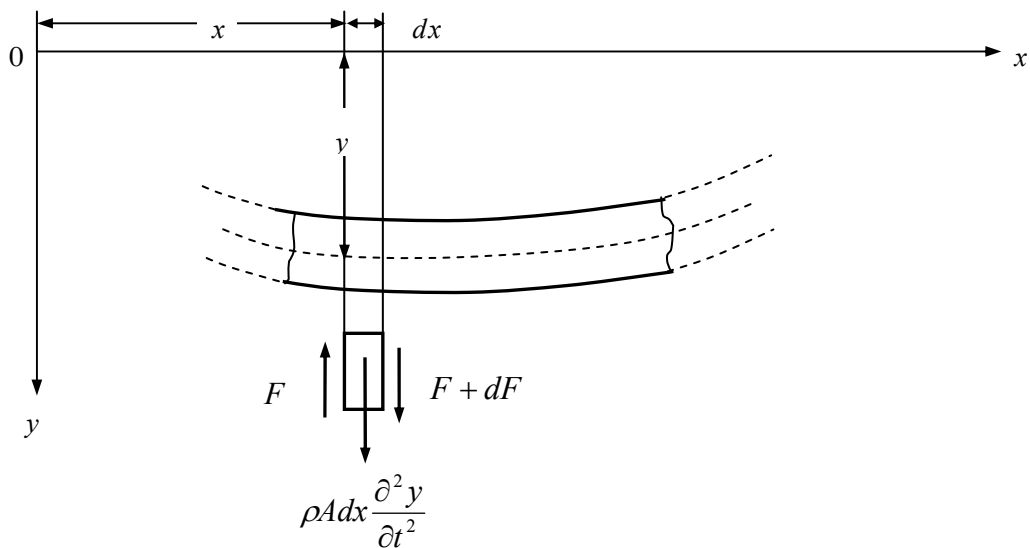


図 B.1 棒の横振動

$$F = \frac{\partial M}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \quad (\text{B.1})$$

dx 部分の右側に作用するせん断力 $F + dF$ は

$$F + dF = -\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) dx \quad (\text{B.2})$$

ここで材料の密度を ρ とおくと、 dx 部分の質量は $\rho A dx$ ，これにせん断力の作用

する方向で運動方程式を立てると

$$\text{質量} \times \text{加速度} = \text{外力}$$

より

$$(\rho A dx) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) dx + \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \quad (\text{B.3})$$

したがって

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (\text{B.4})$$

均一な棒の場合は、 $EI = \text{一定}$ 。

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad (\text{B.5})$$

ここで、曲げ振動の基本方程式が求まった。

運動方程式の解 $y(x, t)$ を変数分離法によって求めるために、変数 x だけを含む関数 $X(x)$ 、変数 t だけを含む関数 $R(t)$ として

$$y(x, t) = X(x) \cdot R(t)$$

で表す。

基準関数を $X(x)$ ；振動モードを決定する。

基準座標を $R(t)$ ； A_0, B_0 を任意定数、固有角振動数 ω とすると

$$R(t) = A_0 \cos \omega t + B_0 \sin \omega t$$

したがって

$$y(x, t) = X(x) \cdot (A_0 \cos \omega t + B_0 \sin \omega t) \quad (\text{B.6})$$

式 (B.6) を式 (B.5) の基礎方程式に代入して固有角振動数等を求めることになる。代入すると

$$EIR(t) \frac{d^4 X(x)}{dx^4} - \omega^2 R(t) \rho A X(x) = 0 \quad \text{より} \quad EI \frac{d^4 X(x)}{dx^4} - \omega^2 \rho A X(x) = 0$$

ここで

$$\lambda^4 = \omega^2 \frac{\rho A}{EI}, \quad \omega = \lambda^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

とおくと

したがって、式 (B.8) と式 (B.10) より

$$\left. \begin{aligned} C_1 + C_3 &= 0 \\ C_1 - C_3 &= 0 \\ C_1 \cosh \lambda l + C_2 \sinh \lambda l + C_3 \cos \lambda l + C_4 \sin \lambda l &= 0 \\ C_1 \cosh \lambda l + C_2 \sinh \lambda l - C_3 \cos \lambda l - C_4 \sin \lambda l &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.11})$$

式 (B.11) から

$$\begin{aligned} C_1 = C_2 = C_3 &= 0 \\ \sin \lambda l &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

式 (B.12) の振動数方程式が得られた。

よって

$$\lambda l = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

固有角振動数は

$$\omega_n = \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{B.13})$$

基準関数は任意定数 $C (= C_4)$ として

$$X(x) = C \sin \lambda x = C \sin n\pi \frac{x}{l} \quad (\text{B.14})$$

が求められた。後述の表 B. 1 を参照されたい。

B.2 いろいろな連続体形状の固有モードと固有振動数

連続体の代表例として前述 B.1 に両端単純支持の梁を取り上げた。次にいろいろな形状の連続体の固有振動数を列挙する。図 B.4, 表 B.2～表 B.4 の数値は「日本機械学会編：機械工学便覧，基礎編 a2 機械力学，丸善，2007」を参照した。

なお， $f = \frac{\omega}{2\pi}$ ， f ：固有振動数（単位：Hz あるいは s^{-1} ）， ω ：固有角振動数

（単位：rad/s）。

(1) 棒の縦振動

$$f_n = \frac{\lambda_n}{2\pi \cdot l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (\text{B.15})$$

n : 振動系の次数

E : 縦弾性係数

ρ : 密度 (単位体積当たりの質量)

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} : \text{波の伝播速度}$$

l : 棒の長さ

λ_n : 自由-自由 ; $\lambda_1 = \pi, \lambda_2 = 2\pi, \lambda_3 = 3\pi, \dots$

固定-自由 ; $\lambda_1 = \pi/2, \lambda_2 = 3\pi/2, \lambda_3 = 5\pi/2, \dots$

(2) 丸棒のねじり振動

一端固定, 他端自由

$$f_n = \frac{\lambda_n}{2\pi \cdot l} \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (\text{B.16})$$

n : 振動系の次数, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

G : 横弾性係数

ρ : 密度 (単位体積当たりの質量)

l : 棒の長さ

λ_n : 自由-自由 ; $\lambda_1 = \pi, \lambda_2 = 2\pi, \lambda_3 = 3\pi, \dots$

固定-自由 ; $\lambda_1 = \pi/2, \lambda_2 = 3\pi/2, \lambda_3 = 5\pi/2, \dots$

(3) 梁の横振動

$$f_n = \frac{\lambda_n^2}{2\pi \cdot l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (\text{B.17})$$

n : 振動系のモード次数 (図 B.2 参照)

A : 梁の断面積

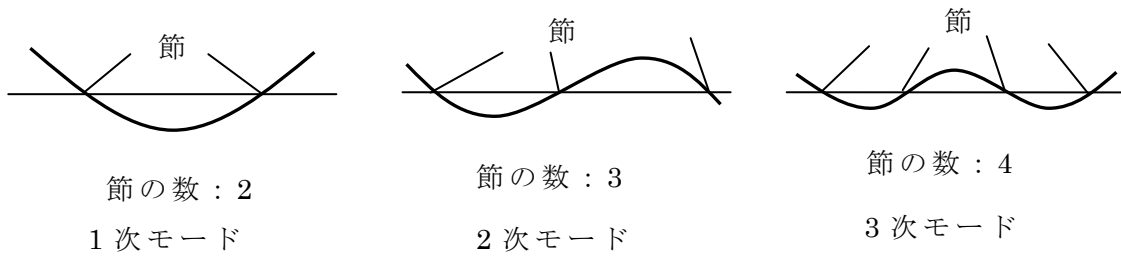
I : 断面二次モーメント

E : 縦弾性係数

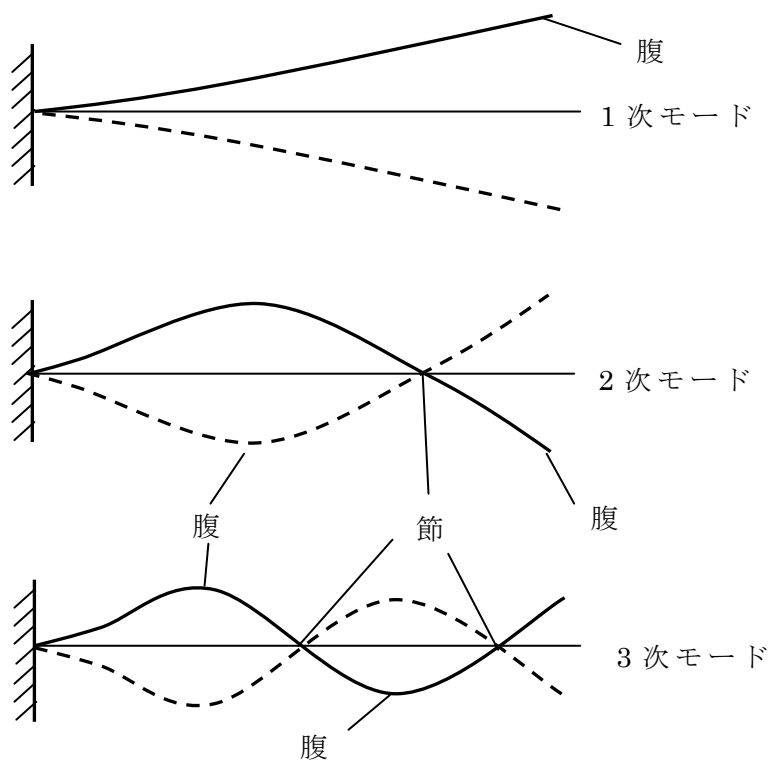
λ_n : 表 B.1 参照

ρ : 密度 (単位体積当たりの質量)

l : 棒の長さ



(a) 両端自由 (自由-自由)



(b) 片持ち梁 (固定-自由)

図 B.2 梁の曲げ振動モード

表 B.1 式 (B.17) の λ_n

	λ_1	λ_2	λ_3
	1 次	2 次	3 次
単純支持 (支持-支持)	π	2π	3π
片持ち梁 (固定-自由)	1.875	4.694	7.855
片持ち梁 (固定-支持)	3.927	7.069	10.210
自由-自由	4.730	7.853	10.996
固定-固定	4.730	7.853	10.996

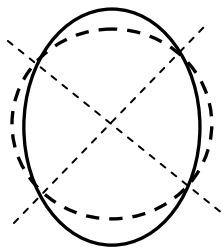
(4) 完全輪の半径方向振動 (円形輪の中央線が伸縮する半径方向変位の場合)

$$f_n = \frac{\sqrt{1+n^2}}{2\pi \cdot R} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (\text{B.18})$$

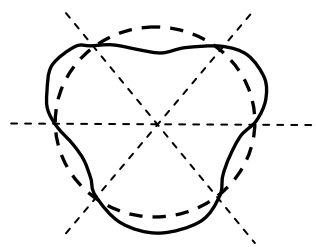
n : 全波形の数 (モード次数) (図 B.3 参照)

E : 縦弾性係数, ρ : 密度 (単位体積当たりの質量)

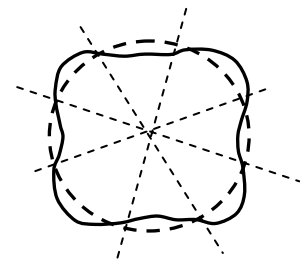
R : 輪の半径 (輪の中央線)



$n = 2$



$n = 3$



$n = 4$

図 B.3 完全輪の振動モード

(5) 円形膜の横振動

$$f_{ns} = \frac{\lambda_{ns}}{2R} \sqrt{\frac{T}{\rho_a}} \quad (\text{B.19})$$

T : 単位長さ当たりの一定の張力 (N/m)

ρ_a : 単位面積当たりの質量

λ_{ns} の n : 周方向の次数, s : 半径方向の次数 (節円の数) (図 B.4 参照)

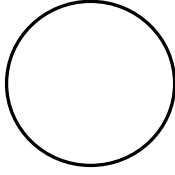
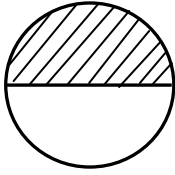
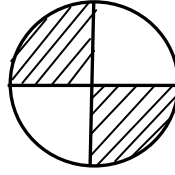
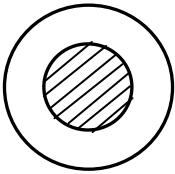
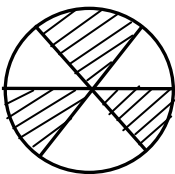
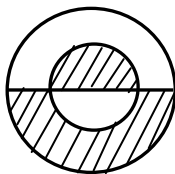
		
$\lambda_{00} = 0.765$	$\lambda_{10} = 1.216$	$\lambda_{20} = 1.637$
		
$\lambda_{01} = 1.760$	$\lambda_{30} = 2.027$	$\lambda_{11} = 2.234$

図 B.4 円形膜の固有モードと λ

ただし、円周の拘束(境界)条件は外周 R に沿って、「半径 R 、周方向 θ 、時間 t 」に関して 0 とする。

(6) 円板の横振動

外内周に沿って一様な境界条件をもつ円板

$$f_{ns} = \frac{1}{2\pi} \frac{Par}{R^2} \sqrt{\frac{D}{\rho_a}} \quad (\text{B.20})$$

$\nu = 0.33$ ポアソン比

n : 節直径の数

s : 節円の数

固有モードは図 B.4 と同じ

R : 半径

D : 円板の曲げ剛性

$$D = E \frac{2Rt^3}{12}$$

E : 縦弾性係数, t : 板厚

ρ_a : 単位面積当たりの質量 (kg/m^2)

Par : パラメータ表 B.2 参照

表 B.2 式 (B.20) の *Par*

	<i>s</i> \ <i>n</i>	<i>n</i>			
		0	1	2	3
周辺自由	0	—	—	5.253	12.23
	1	9.084	20.52	35.25	52.91
	2	38.55	59.86	83.9	111.3
	3	87.80	119.0	154.0	192.1
周辺固定 ν に無関係	0	10.21	21.26	34.88	51.02
	1	31.77	60.82	84.58	111.0
	2	89.10	120.1	153.8	190.3
	3	158.2	199.1	242.7	289.2

(7) 円筒殻の半径方向振動

平均半径 R をもつ薄い円筒殻

$$f_{(n)} = \frac{1}{2\pi} \frac{Par}{R^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (\text{B.21})$$

$$\frac{h}{R} = 0.02 \quad , \quad \nu = 0.3$$

m, n : 振動数の次数 (ここでは円筒殻長さ方向の波 m は考慮しない.)

(n) : 周方向波数 (図 B.5 参照) 拘束条件 ; 両端に沿って単純支持辺

L : 円筒殻の両端 $x = 0, L$

h : 円筒厚

R : 円筒殻の半径

ρ : 密度 (単位体積当たりの質量)

Par : パラメータ表 B.3 参照

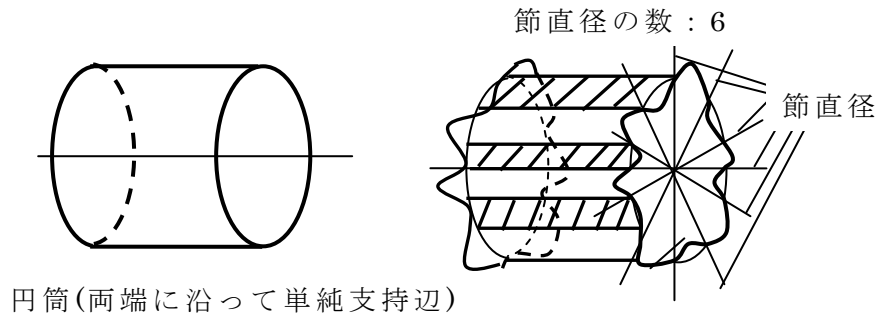


図 B.5 円筒殻の振動モード ($n=5$ 次モード)

表 B.3 式 (B.21) の Par

モード (n) L/R	1	2	3	4
2	0.1645	0.1795	0.2116	0.2320
4	0.0780	0.0982	0.1196	0.1478
8	0.0371	0.0494	0.0894	0.0916

(8) 長方形板の横振動

① 周辺単純支持

$$f_{mn} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{D}{\rho_a} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)} \quad (\text{B.22})$$

m, n : 振動次数 周辺単純支持 (x, y 方向の半波数) 図 B.6 参照

ρ_a : 単位面積当たりの質量 kg/m^2

a : 横長さ (x 軸)

b : 縦長さ (y 軸)

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu)}$: 板の曲げ剛性

E : ヤング率 (縦弾性係数)

h : 板厚

ν : ポアソン比 = 0.3

② 長方形の周辺境界条件の違いによる固有周波数を求めると、次の式となる。

$$f_{mn} = \frac{1}{2\pi} \frac{Par}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho_a}} \quad (\text{B.23})$$

Par : パラメータ表 B.4 参照.

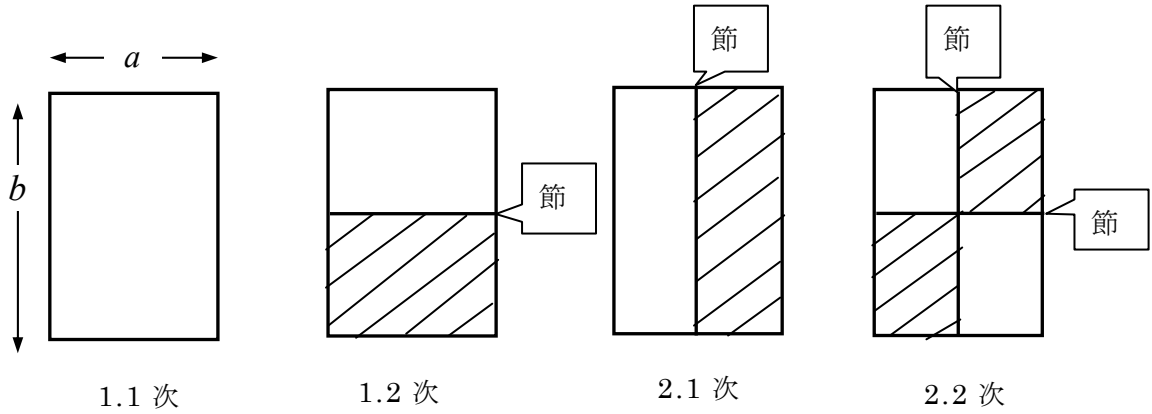


図 B.6 長方形板の固有モード

表 B.4 式(B.23)の Par

境界条件	モード	a/b				
		0.4	2/3	1	1.5	2.5
自由 (モードは節が対角線, 曲線等存在する)	1	3.433	8.931	13.47	20.09	21.45
	2	5.278	9.517	19.60	21.41	32.99
	3	9.541	20.68	24.27	46.35	59.63
	4	11.33	22.18	34.80	49.91	70.80
単純支持 (a/b=1 を境に m, n の値は逆になる)	1	11.45(m=1,n=1)	14.26(m=1,n=1)	19.74(m=1,n=1)	32.08(m=1,n=1)	71.55(m=1,n=1)
	2	16.19(m=1,n=2)	27.41(m=1,n=2)	49.35(m=1,n=2)	61.68(m=2,n=1)	101.2(m=2,n=1)
	3	24.08(m=1,n=3)	43.86(m=2,n=1)	49.35(m=2,n=1)	98.70(m=1,n=2)	150.5(m=3,n=1)
	4	35.14(m=1,n=4)	49.35(m=1,n=3)	78.96(m=2,n=2)	111.0(m=3,n=1)	219.6(m=4,n=1)
固定(v に無関係)	1	23.64	27.00	35.98	60.70	147.8
	2	27.81	41.70	73.39	93.83	173.8
	3	35.42	66.12	73.39	148.8	221.3
	4	46.67	66.52	108.2	149.7	291.7