はじめに

「2 より大きい素数 p が二つの整数 a, b を用いて $p = a^2 + b^2$ と表されるためには $p = 4n + 1$（n は整数）と表されることが必要十分である」というとても美しい定理がある．「2 平方和定理」と呼ばれるこの定理は，17 世紀の数学者フェルマーによって最初に証明されたとされる．整数 a, b を用いて $a+bi$ と表される数を「ガウス整数」と呼ぶことにすると，「2 平方和定理」は素数 p がガウス整数の世界で $p = (a + bi)(a - bi)$ と分解する条件を与えている定理であると見ることができる．数学では，このように，考えるべき対象を広げることにより問題の見通しが良くなるという現象にしばしば遭遇する．本書の目的は，通常の整数をより深く理解するために，「2 次体の整数」と呼ばれる，通常の整数の世界よりも少しだけ広い数の世界を探求していくことである．

よく知られているように，通常の整数の世界では「素因数分解の一意性」が成り立つ．それは通常の整数の世界における最も基本的な定理であるため，「算術の基本定理」とも呼ばれる．ところが，拡大された整数の世界では一般には素因数分解の一意性に相当する定理が成り立たない．この現象は「代数的整数論」における整除理論を著しく困難にする要因であるが，それは既に 2 次体で現れる現象である．デデキントは，クンマーの「理想数」の理論をもとに，この困難を「イデアル」という概念を用いて克服すること

を考えた．イデアル論は，その後の抽象代数の発展に伴い大きく進化し，現代の代数学においてはなくてはならない重要なものになっている．従って，2 次体の整数論を通してイデアルを理解することは，代数学を理解する上でも有益であると思われる．

本書の中心は 2 次体の整数論であるが，その前提となる初等整数論の解説から始めることにした．初等整数論で通常扱われる主な題材はある程度網羅したつもりであるが，頁数の関係から，それ自身魅力的なトピックであり，実 2 次体においても重要となる連分数については全く触れることができなかった．また，本書の範囲を超える定理 7.7 と定理 7.28 を除き，基本的には全ての定理や命題に証明をつけ，self-contained であることを心がけた．従って，本書を読む上で代数学の予備知識は殆ど要らないが，群論の初歩（アーベル群の基本的なこと）を知っている方が読みやすい．環論についても，（剰余環を扱う場合を除き）「環とは足し算と掛け算があり分配法則などの成り立って当然と思えるものが成り立つ世界」という程度の認識でも問題はないが，読者の便宜のために最後の付録で，群論と環論の基本的な事柄をまとめておいたので必要に応じて参照されたい．

最後に，本書を執筆する機会と多くの助言を与えて下さった桑田孝泰先生（東海大学教授）に心から感謝の意を表したい．また，本書の執筆校正にお世話になった共立出版の野口訓子さんにはお礼を申し上げたい．更に，2011 年度の学部ゼミにおいて高木貞治の「初等整数論講義」を読んでいた関係もあり，本書の原稿を読んで多くの誤植を発見してくれた，当時立教大学理学部数学科 4 年生の青木梓さん，遠藤周君，金子陽一君，船山宏樹君の 4 人にも感謝したい．

2012 年 11 月

青木　昇