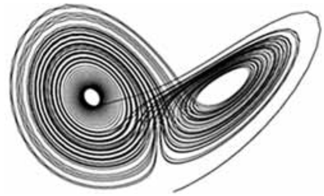

まえがき

この本の原書[1] が出版されて 30 年，力学系という数学の一分野には多くの変化があった．1970 年代の初頭，高速に演算やグラフィックのできるコンピュータなどは我々には縁遠いものであったし，**カオス**という用語も数学的に用いられていなかった．そもそも微分方程式や力学系の理論に興味をいだく者の大多数は，数学者の，それもごく小さなグループに限られたものだったのだ．

しかし，この 30 年で我々を取り巻く環境は劇変した．コンピュータはどこにでもあるし，微分方程式の近似解を求め，その結果を容易に視覚化できるようなソフトウエアが普及している．そのおかげで，微分方程式によって定められる非線形力学系の解析は，かつてより身近なものになった．さらに，馬蹄写像，ホモクリニックなもつれ，ローレンツ系といった複雑な例の発見と，それらの解析は，平衡点や周期解といった単純で安定な動きの解が，もはや微分方程式の研究の最重要事項ではないと科学者たちに確信させたのだ．また，これらカオス現象のもつ美しさと，比較的それらにアクセスしやすくなったことが動機となって，科学や工学の様々な分野で，それぞれ重要な微分方程式がより注意深く見直され，カオス的な性質が発見された．例えば，化学におけるベルーゾフ・ジャボチンスキー振動，電気工学のチュアのカオス的回路，天体力学の複雑な動き，それに生態系で起こる分岐現象など，今では科学のほとんどの分野において，力学系的現象を見ることができると言ってよいであろう．

[1] M. W. Hirsh & S. Smale, *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra*, Academic Press (1974), 邦訳：『力学系入門』田村一郎，水谷忠良，新井紀久子訳，岩波書店 (1976).

その結果，微分方程式と力学系に関するテキストの読者層は，1970 年代にくらべかなり増え，その分野も多岐にわたるようになった．この本もそれに応じて，Hirsh と Smale の原書から，次に列挙するような大きな変更をすることになった．

1. 線形代数の説明は減らし，抽象的なベクトル空間やノルム空間などの概念，$n \times n$ 行列の標準形の帰納的証明などは全て省略した．どちらかと言えば 3×3 以下の行列を主に扱う．
2. 新たにローレンツ系，シルニコフ系，ダブルスクロール・アトラクターなどのカオス的な性質に関し詳しい説明を行った．
3. 従来から載っていた応用例を更新し，新しいものも多くつけ加えた．
4. いくつかの章で離散力学系を取り扱うことにした．
5. 力学系を C^{∞} 級で考えたので，定理の主張の多くから煩雑さが軽減した．

この本は，3 つの主要な部分から成っている．最初に，線形微分方程式系と 1 階の非線形微分方程式系を扱う．次に，このテキストの核とも言うべき話題として，2 次元の非線形系に焦点を合わせ，様々な分野への応用も取り扱う．そして最後に，高次元の力学系を扱うが，ここでは平面の力学系では起こりえないタイプのカオス的性質に焦点をあてる．また，それらを調べるのに有効な手段である離散力学系への簡約化も説明する．

バックグラウンドの全く異なる様々な読者に対して，本を書くということは意味のある試みである．まずこの本は，少し進んだ微分方程式の講義のテキストとして使えるであろう．また，数学者のみならず，科学者，工学者で，それぞれの分野に現れる微分方程式を分析するために充分な数学的なテクニックを探している場合にも役に立つであろう．線形代数や実解析のしっかりしたバックグラウンドを持っている者や，そうでない者もこの本を手に取るであろう．このような両者に本書を読んでもらうために，極めてわかりやすい低い次元の微分方程式系から話は始める．この話題のほとんどは，微分方程式をすでに知っている読者には復習となるだろうし，彼らのために最初から最新の話題もちりばめられている．

具体的には，最初の 1 階微分方程式を扱うところでは，おなじみの線形微分方程式と生物の個体数に関するロジスティックモデルの話題から始まる．さらに，生物間の補食・被補食関係から導きだされるロジスティックモデルにおいて，その定常状態や周期的状態も扱う．これによって早い段階から分岐という概念を導入でき，さらにポアンカレ写像や周期解なども説明している．これらの話題は，微分方程式の初学者には聞き慣れない話だろうが，多変数の微積分の知識がある者なら誰でもわ

かる内容である．もちろん，まずはそのような特別な話題を飛ばして，もっと基本的な内容を理解しながら読むのでも構わないであろう．

第2章から第6章までは，微分方程式による力学系を扱う．急がずに，第2，3章では2次元の線形代数と線形微分方程式系のみを扱う．第5，6章で高次元の線形微分方程式系を扱う．ここでも一般的な n 次元の場合ではなく3または4次元だけを扱うのだが，これらのテクニックは簡単に高次元に拡張できることを強調しておく．

この本で最も大切なことは，非線形力学系の話題である．線形力学系の場合と違い，非線形力学系には理論的な難しさがある．例えば，その解の存在と一意性や，初期条件やパラメータに関する解の依存性などに関することがそれである．第7章では，これらの難しい問題にのめり込むのはやめて，重要な定理のみを述べる．さらに，その定理が何を述べて，何を述べていないかも含め，例を使って説明する．これら定理の証明は全て最終章に載せてある．

非線形を扱った最初のいくつかの章で，平衡点の近傍での線形化，ヌルクライン解析，安定性定理，極限集合，分岐理論などの重要なテクニックを紹介する．また，後半でこれらのアイデアを生物学，電気工学，力学などへ応用していく．

各章末に「探求」という節が設けられているが，そこには特別な話題や，より進んだ応用に関わる数値実験などを載せた．それら全てに，わかりやすい導入がなされ，さらに進んで学べるよう参考文献も付けた．しかし，それらの利用の仕方は全て読者に任せる．手がつけられるように並べられた問題は，それらを詳しく分析していけば，いずれ本格的な研究になるよう，どのように扱えばよいかヒントを与えるようにした．だから，よくテキストの末尾に付いている「模範解答」は本書には載っていない．これらの探求に対する完璧な答えは，それを探求する読者のみ知りうることで，誰かが知っていることではないのだ．

最終章ではカオス的性質としてよく知られる，高次元力学系の非線形特有の複雑な性質を扱う．まず，有名なローレンツの微分方程式系を通してカオスの概念を紹介する．3次元以上の力学系を扱うときの手法として，その微分方程式が有する複雑性の本質を損なうことなく，よく知られた離散力学系とか反復写像に簡約化することがある．そのために離散力学系を学び，記号力学がカオス的な力学系をどのように完璧に記述するのかを知るであろう．その後，そのテクニックをホモクリニック軌道の存在などに関するカオス的力学系に応用するため，さらに非線形微分方程式で定義された力学系を扱う．

本書に関する情報，例えば，訂正箇所や本書を使って講義やゼミを行う方々に有益な話題など，全て http://math.bu.edu/hsd/ にて提供している．また，本書に関するご意見などもここで承っている．

最後に，本書の執筆にあたり Bard Ermentrout 氏，John Guckenheimer 氏，Tasso Kaper 氏，Jerrold Marsden 氏，Gareth Roberts 氏からコメントを頂いた．さらに，Daniel Look 氏と Richard Moeckel 氏には，注意深く全体を通して読んで頂いた．また，本書に載っている相空間図を作成するにあたり，Al Clark 氏が提供する Mathematica 用のパッケージ DynPac（http://www.me.rochester.edu/~clark/dynpac.html）を使用させて頂いた．また，いつも通り Ki$\ell\ell$er Devaney に原稿を推敲してもらった．間違いがあったら彼女が見落としたのだと思う．