シリーズ「新しい解析学の流れ」発刊にむけて

「解析学」は現象の分析・解析に源を持つ数学の分野であり，古典力学を背景とした 17 世紀のニュートンによる微分・積分法の創始にも代表されるように，物理学と深い関係を持ちながら発展してきた数学である．さらに 19 世紀のコーシーらの研究をはじめ，解析学は極限などの「無限」を理論的に扱う数学の分野としても特徴づけられる．20 世紀にはさまざまな抽象概念が導入され，解析学は深まりを見せる一方で，代数学や幾何学との結び付きを深める解析学の分野も成長し，さらに確率論も加わって多様な進歩を遂げている．

他の学問との関わりでは，特に 20 世紀後半には物理学はもとより工学や化学・生物学・経済学・医学など，多様な分野に現れる種々の非線形現象の分析・解析・数理モデル化との関わりも深めてきた．さらに計算機の飛躍的な進歩により，それまでには扱うことのできなかった複雑な対象への取り組みも可能となっている．このような計算機を援用した新たな取り組みの中で，新しい時代の解析学が芽生える一方，解析学の研究で得られた成果が数値計算などを通して多くの応用分野を支えるに至っている．

このような解析学を取り巻く状況変化の中で，21 世紀における「解析学」の新しい流れを我が国から発信することが，このシリーズの目的である．これは過去の叡知の上に立って，夢のある将来の「解析学」像を描くことである．このため，このシリーズでは新たな知見の発信と共に先人の得た成果を「温故知新」として見直すことも並行して行い，さらには海外の最新の知見の紹介も行いたいと考えている．したがって本シリーズでは，新たな良書の書き下ろしはもちろんのこと，20 世紀に出版された時代を越えた名著を復刊して後世に残し，さらには海外の最新の良書の翻訳を行う予定である．また，最先端の専門家向けの高度な内容の書物を出版する一方で，これからの解析学の発展を担う若い学生を導くためのテキストレベルの書物の出版も心掛けていく予定である．

序　　文

偏微分方程式論は人類の叡知の傑出した業績の一つである．この理論が物理科学の発展に及ぼした影響ははかりしれない．しかし，偏微分方程式論の歴史は長く，またその応用は広範囲にわたるため，この理論をバランスよく纏めることは不可能に近い．そのため，学生用のテキストの著者は，広く浅い記述か，あるいは著者が興味を持つ特定の話題に関する深い記述を行なうかの選択を強いられることになることを，あらかじめ注意しておかねばならない．

線型微分作用素のスペクトル論への簡明な入門書として本書を著した．スペクトル論は David Hilbert によって 1900 年から 1910 年の間に行なわれた無限次元空間——現在 Hilbert 空間と呼ばれている——上の積分作用素に関する基礎的な研究の副産物である．しかしながら，数学におけるほとんどすべての重要な新理論の展開と同様に，この Hilbert の業績にも関連する多くの先行研究がある．例えば，Poincaré による Dirichlet 問題に関する固有値の解析 (1890–6) などはその例である．この問題は，1822 年に Académie Française によって出版された，三角関数による級数展開を用いて熱方程式の解の解析を行った Fourier の先駆的研究に端を発するものである．Fourier がこの論文を投稿したのはナポレオン帝政の時代の 1807 年であるが，不運なことに出版されるまでに 15 年を要してしまった．この間の事情は Körner (1988) に述べられている．本書において，いくつかの重要な概念については，これに関する人名と年代を示しているが，より包括的な記述は Dieudonné のもの (1981) を参照するとよい．

本書の大部分の話題は線型微分作用素，特に二階の楕円型微分作用素に限定した．この話題に限定したことの正当性の一つは，物理や工学において重要な方程式の多くが二階の楕円型微分作用素によって記述されることにあ

る．このうち最も重要なものは非相対論的量子論であり，その基礎となるのは Schrödinger 作用素の固有値問題の解析である．また，幾何学や確率解析への二階楕円型作用素の理論の応用は，現在非常に重要なものとなっている．時間的な制約により波動方程式に関する記述は諦めざるを得なかったが，本書で扱った話題と同様，波動方程式の理論が重要なものであることは論を待たないであろう．もっとも，波動方程式に関しては，擬微分作用素論——これも微分方程式論における広大な分野の一つである——を背景として議論を展開することが望ましいというのが著者の見解である．高階の楕円型作用素論は自然な方法で二階の楕円型作用素論を拡張したものであるが，二階楕円型作用素が持つ Brown 運動との関連が失われてしまう．詳細に述べるまでもなく，本書に示す手法は，高階の理論においても重要な役割を果すことは確かである．非線型微分方程式は多様性と複雑性において新たな次元の研究対象を提示するものであるが，非線型微分方程式の解析においても，やはり線型微分方程式論は重要な役割を担っている．KdV 方程式は付随する線型微分方程式族の性質によって表現される解を持つ．このほか，多くの非線型微分方程式に対して，局所的な解の存在定理は，係数に関して非常に弱い制約を持つ作用素の線型理論によって証明される．

スペクトル理論は数多くの定性的，定量的な手法によって研究された非常に実りの多い分野である．例えば，Sturm–Liouville の理論，変数分離，Fourier 変換と Laplace 変換，変分法，超局所解析，確率解析，有限要素法を含む数値計算法などである．本書の読者がこのような発展的な課題を今後一層学ぶか否かにかかわらず，基礎的な話題を学修する機会は持つべきである．

本書は作用素が滑らかな係数を持つことを仮定しないという点，および Sobolev の埋蔵定理を多用しないという点で，他の楕円型微分作用素の入門書とは異なっている．また，スペクトルの上限と下限の評価に関する事項と，作用素が作用する領域に関する定量的な仮定については，同程度の他の書籍と比べてより詳細な記述を行なっている．読者が本質的な概念をより理解しやすくするために，多くの定理は一般性を多少犠牲にしてもわかりやすく記述し，その証明を与えている．

本書を読むにあたって必要となるのは Hilbert 空間と Banach 空間につい

てのいくつかの定理，Lebesgue 積分と測度論，それに多少の Fourier 変換の知識である．ここでは，読者が抽象 Banach 空間における有界線型作用素のスペクトル論を一通り知っていることを仮定している．第 2 章において，非有界自己共役作用素に対するスペクトル定理の全く新しい証明を与えている．この証明は著者 (Davies, 1993) によるものであるが，これは近年，スペクトル理論と散乱理論において多くの重要な応用を持つ Helffer と Sjöstrand の公式を基にしたものである．この証明は直接的でわかりやすく，微分方程式の他の分野でも用いられる重要なテクニックを含んでいる．また，スペクトル理論の定理の証明を既に知っている読者にとっても，これは有益なことである．

抽象的なスペクトル理論を扱う第 1 章，第 2 章および第 4 章が本書の核となる．第 8 章を除く残りの章は互いに独立した応用である．第 8 章は Schrödinger 作用素に関する話題で，第 3 章に述べる Fourier 解析の手法を用いた定数係数作用素の取扱いに非常に強い関連がある．本書で扱う話題の大部分は大学の数学科の 4 年生から修士課程程度における一年間のコースとして学習できる．定理 2.5.1, 5.4.2 および 6.2.3 をまずは証明抜きに認めたうえで，そこから導かれる結果を理解するという方針により，より短いコースを構成することも可能である．本書で扱う話題のほとんどすべてがかなり以前から知られていることであるが，これらの内容を私自身の研究上の興味に関連する形で示した．すなわち，特に Hilbert 空間のテクニックと変分法に集中する形で，本書では整理している．この方法は数十年にわたって用いられてきたが，二次形式の理論の発展にともなって特に有用性を獲得したのは，この 15 年ほどのことである．

本書は著者による三部作の第一巻として位置付けたいと考えている．他の二冊は，*One-Parameter Semigroups* (1980) と *Heat Kernels and Spectral Theory* (1989) である．

最後に，この序文を借りて，この 20 年間にスペクトル論における著者の興味を刺激してくれた多くの人々に感謝の意を表明したい．著者の学生である A. Arnal, O. Nicholas, M. Owen, そして P. Oleche には建設的な意見を与えてくれたことと，また数多くのミスプリントなどを修正してくれたこと

に感謝する．ミスプリント以上に残された誤りは全て著者の責任に帰するものであることは言うまでもない．

Kings College, London　　E. Brian Davies

March 1994

訳者序文

本書は E. B. Davies 教授の *Spectral Theory and Differential Operators* (Cambridge University Press) の翻訳である．原著タイトルの示す通り，本書は非有界作用素である微分作用素のスペクトル理論に関するの入門テキストであり，日本の数学科などのカリキュラムでいえば，3 年生から 4 年生で学修する一般的な関数解析のコースを終了した学生が，関数解析と微分方程式論の接点の理解を深めるために，続いて読むべき専門書のなかの一冊と考えられるものであり，内容分量ともに極めて適切なもの思われる．

スペクトル理論は関数解析の話題としては歴史のある分野であり，本書の中でも触れられている Reed–Simon の有名な著書の他，多くの良書がこれまでにも出版されているが，いずれもなかなかの分量である．その中で著者の Davies 教授は，1990 年代以降の最近の研究に基づいたエレガントな切口でスペクトル理論を展開して，大部ではないが充実した内容で本書を纏めている．したがって，本書は自学自習でも取り組める分量ではあるが，内容はスペクトル理論を用いた研究に直結できる読みごたえのあるテキストといえる．Davies 教授はスペクトル理論や半群に関する著書も多く，既にスペクトル理論に関するものも見られるが，著者の前書きにも書かれている通り，Davies 教授自身が本書を彼のこれまでの著作の第 1 巻と位置づけ，本書のスペクトル理論の入門書的性格を強調している．

訳者は本書の翻訳と平行して，京都大学情報学研究科大学院生の大久保篤志君と，原著を用いた輪講セミナーを行い，内容の理解を深めながら翻訳作業を続けたが，このセミナーでの大久保君との議論は翻訳作業のモチベーションを維持するためにも非常に有益であった．原著には些細な点も含めていくつかの誤りがあったが，出版元から送られてきた正誤表と輪講での議論に基づき，翻訳の際には可能な範囲で修正を行っている．大久保君はこの輪

講をきっかけに数理物理の研究を始めているが，要所要所で本書の輪講で得られた知識が研究を支えているようにも見受けられる．また，大久保君には校正原稿のチェックも助けて頂き，感謝しており，この場で改めて感謝を表したい．

本シリーズの編集委員である木上淳教授と磯祐介教授には，本書の翻訳を勧めて頂き，また恩師の磯祐介教授には翻訳の上での助言も頂戴し，両氏には深く感謝いたす次第である．

私事になるが，本書は訳者の初めての書籍の出版であり，それがこのような素晴らしいテキストと出会えて，その翻訳が最初の出版となったことは，大変嬉しく思っている．翻訳の途中で少し体調を崩したため，共立出版の小山透氏と大越隆道氏には通常の翻訳以上のお手間を取らせてしまったが，色々と便宜を図って頂いたことに感謝している．本書の翻訳には家族，恩師，同僚，院生，編集者など，多くの方の支えがあった．その全ての方々にこの場を借りて改めて感謝しつつ，本書の完成を共に喜びたい．

なお，原著書タイトルの直訳は『スペクトル理論と微分作用素』であるが，磯教授の助言もあり，微分方程式を学修する多くの学生に広く手軽に読んでもらいたいという気持ちから，訳書のタイトルは『スペクトル理論と微分方程式』とすることとにした．

2007 年 6 月

若野功