

# はじめに

現代科学のための数学の基礎として、数の理解（初等整数論）、行列と行列式（線形代数学）、微分と積分（解析学）が必修であることは常識になっているが、これらの教科より約 100 年遅く学問が開始された結び目理論の初歩も今日ではこれらに加える必要があるのではないかと筆者は考えている。というのは、科学技術の進歩により、結び目理論は数学はもとより大変多くの科学との本質的な結びつきがみられるようになってきているからである。この本は、結び目理論と関係するどのような研究においても、基本的事項として知っているのが望ましい結び目や絡み目の全般的な理論を、講義形式で解説したものである。結び目理論の基本的道具は**トポロジー（位相幾何学）**(topology)の言葉で記述されるので、結び目や絡み目を利用してトポロジーの初歩を学ぶための教材にもなっている。

第 1 講では、実際の生活や科学における一般的な知識としての絡み目について説明し、結び目理論の研究の目的やそのための数学の役割について説明する。第 2 講では、結び目理論の初歩となる絡み目とそれらの正則表示、ブレイド表示などの基礎的概念について解説する。第 3 講では、結び目や絡み目のトポロジーについての初歩的事柄を解説する。第 4 講では、結び目理論の文献などに説明なしでしばしば登場する標準的な絡み目の例について述べる。今日では、絡み目を識別するのに利用される位相不変量がたくさん知られているが、いまだ計算可能で完全な不変量は知られていない。また計算可能な不変量には、計算量が多くとり扱いの難しいものが少なくない。いろいろな絡み目の位相不変量を計算してみると合点が行くことであるが、一般的には強力な位相不変量ほど計算が厄介になっている。この経験は、数学の問題について“難しさ保存の法則”が成り立つ（言い換えると、難しい問題にはどのような方法を用いたとしても何らかの難しさがつきまとう）ことを実感させる<sup>1</sup>。第 5 講では、絡み

---

<sup>1</sup> しかしながら、手法を選ぶことにより問題が見易くなることは大いにあり得るし、また採用した手法の発達程度により問題が簡単に解ける場合もある。

目の位相不変量として、初学者が最初にとり扱うのが適当と筆者が考える、比較的単純な計算で済むゲーリッツ不変量について解説する。この講のねらいは、比較的簡単な手計算により標準的な絡み目の違いを実感させることである。結び目理論の研究においては、まず簡単な計算でどの程度の絡み目の違いがわかるかを見極める力量が必要であるので、このような訓練は必要といえる。第6講では、量子不変量の初歩的不変量であるジョーンズ多項式について解説する。第7, 8講では、ザイフェルト行列から導かれる種々の位相不変量について解説する。絡み目はザイフェルト曲面とよばれる曲面の境界になっているが、それに付随してザイフェルト行列という正方整数行列が得られる。結び目理論においては、これから導かれる絡み目の位相不変量（アレクサンダー多項式・コンウェイ多項式、符号数、アーフ不変量など）は最も標準的な位相不変量であり、常識化しておくのが望ましい概念である。第9講では、ジョーンズ多項式とコンウェイ多項式を一般化しているスケイン多項式について、スケイン多項式の係数多項式族であるスケイン多項式族の観点から解説する。第10講では、結び目理論本来の目的である絡み目の分類法を、筆者が導入して田山育男氏と共同で研究している整数格子点表示の観点から、解説する。具体的には、整数格子点全体に「自然な」整列順序を導入して、整数格子点表示の長さ8までの擬似素絡み目の分類表を示す。これは第9講までに述べた考え方や不変量により確認できる表であり、この分類表のようになるかどうかを実際にいろいろな考え方や不変量を用いて試してみることは結び目理論を習得する上で適切な訓練であると考えている。また、特講では、絡み目の巡回被覆の理論を解説する。特に、第10講まででは詳しく論じることのできなかつた2橋絡み目の2重分岐被覆空間としてのレンズ空間論の説明および第4講のゲーリッツ不変量の位相幾何的な意味づけをここで言い、それと関連する絡み目の彩色可能性についてもここで解説する。付録には、補足的注意、参考書、そして各講末の問題の解答の簡単な説明が含まれている。

最後に、誤記やコメントをご指摘くださった編集委員および同僚の金信泰造教授に感謝申し上げます。

2007年5月

著者