序

本書はグリーンの定理や，ガウスの定理，ストークスの定理などのいわゆるベクトル解析の一連の定理を微分積分学的にしっかり取り扱うことを目標としている．ベクトル解析の諸定理は微分と積分の関係を示すものであり，それぞれ物理学にも関係があって，具体的な問題の数学的な解析には欠かすことができない．これらの定理は，物理的意味から納得することもできるが，数学的には 1 変数における微分積分学の基本定理の多変数への拡張なのである．本書では物理的な意味も十分に配慮しながら，ベクトル解析に登場する線積分，面積分，曲面の向き付け，ベクトル場の微分などの諸概念について根底から解説して，微分積分学の立場から定理を厳密に証明している．また，微分形式とベクトル解析の関連について若干の解説を加え，将来の勉強に役立つことを期した．著者としては，本書がベクトル解析の基本定理の詳しい解説書として，また多様体の初歩へ導くきっかけとして役に立てば幸いである．

本書に述べた詳細な説明は，ベクトル解析について何かあいまいさを感じてこられた方の不満を晴らす助けになるのではないかと思う．また，一方では曲面や曲面積の直観的な理解のまま進んで定理だけを追っても，章末問題と合わせれば一通り役に立つベクトル解析の知識が得られるであろう．

内容をもう少し詳しく述べると，たとえばガウスの発散定理はなめらかな境界を持つ領域の場合だけでなく，角のある場合も証明した．ただしその反面，3 次元空間までに限定することになったが，ベクトル解析の起源となった古典物理学への応用には十分であるし，一般次元への拡張をどうすればよいか見当を付けていただけるのではないかと期待している．また，ベクトル解析の応用としてニュートンポテンシャルや調和関数について述べ，ベクトル場に対してポアンカレの補題やヘルムホルツの定理を証明した．

幾何学的な方面では，grad や rot などのベクトル場の微分が座標系によらない意味を持つことも述べ，さらに直交曲線座標系を用いた場合の微分の

表現を説明した．また，お話し程度であるが，微分形式によるベクトル解析の表現も解説したので，さらに勉学を続ける動機になれば幸いである．

ベクトル解析の数学的な発展としては多様体上の微分形式を用いた一般化されたストークスの定理があり，さらには調和積分論などへとつながっていく．しかし本書はこのような方向を目指す代わりに，あくまでも 3 次元空間の通常の領域や曲面上の積分に徹して，具体的な意味を深く理解することにこだわった．微分形式については実用的な観点から少々触れるにとどめてある．読者が本書読了後に，巻末文献に挙げたスピヴァック [8] や松島 [14] などの著書によってより現代的なベクトル解析や幾何学に進んでいただければ，まことに喜ばしく思う．

ベクトル解析の定理を数学的に厳密に証明するためには，多変数の微分積分学の結果がかなり必要になる．これについて，本書では必要な事実は他書を参照しなくてもすむように，少なくとも結果だけは第 9 章に述べるということにした．特に第 2.3 節や第 8 章を読むためには第 9 章の内容が不可欠である．しかし，それ以外の部分を読むためには予備知識はもっと少なくてよい．そこで，その他の部分を理解するのに十分なように，第 1 章に記号から始めて微分積分学の最小限の基礎事項を集中して述べた．ここに目を通せば，本書の大部分は理解できるはずである．微分積分学については，一部の結果には証明を付けたが，手間のかかる証明は方針のヒントのほかは参考文献を指示するという形にせざるを得なかった．参考文献は著者が最も内容を熟知している拙著『微分積分学 I』,『微分積分学 II』を中心にしたが，これらの全体が相俟って読者の解析学の理解に寄与できれば著者の本望である．もちろん杉浦光夫氏の『解析入門 I, II』（東大出版会）をはじめ，他にも良い参考書は多数ある．

本書の出版に際して，共立出版の小山透氏には大変お世話になり，深く感謝する．また，著者の友人石田滋氏には，本書の草稿を読んでいただき，ミスの指摘をはじめ，貴重なご意見を寄せていただいたことを記し，篤く御礼申し上げる．

2007 年 4 月 7 日　　著者識す