

序 文

「フラクタルとは何か?」、「フラクタル次元とは何か?」、「フラクタル次元をどのように求め、それから一体何が分かるのか?」、「数学をどのように使ってフラクタルを調べるのか?」などの質問をうけることが多い。本書では、これらの質問のいくつかに答えていきたいと思う。

本書の目的は、フラクタルや次元を扱うために基礎となる数学的理論を、数学を含め諸科学においてフラクタルに出会った人々に紹介することである。本書は基本的には数学書であるが、このテーマに対しては数学的だけでなく直観的にも本質が理解できるように工夫してある。

本書は、自然に2つの部分に分かれている。第I部では、フラクタルとその幾何学に関する一般的な理論を扱う。まず、様々な次元の定義やそれらの計算方法を導入する。次に、円や楕円などの古典的な図形を幾何学的に研究するのと同じような方法で、フラクタルの幾何学的な性質について調べる。古典的な図形の性質として、円は局所的に直線で近似される、一般的に円の射影は楕円である、円と線分は(高々)2点で交わるなどの性質がある。実は、フラクタルでもこれらの性質に相当するものが成り立ち、そのとき、次元が重要な役割を果たすことがわかっている。したがって我々は、フラクタルの局所的な形、フラクタルの射影や共通部分などについて考察する。

本書の第II部では、数学や物理学の様々な分野で得られたフラクタルの例について述べる。ここでの話題は、自己相似集合と自己アフィン集合、力学系、ジュリア集合、ランダムフラクタル、そして物理学における応用に及ぶ。

本書では、多くの図が本文および例の説明に用いられる。その中の多くはコンピュータを用いて描かれたフラクタルであり、プログラミングの知識のある読者なら、それらのフラクタルを自力で描くことができるように、十分な情報を用意したつもりである。

研究者の方々にとっては、フラクタルの基礎となる数学的理論の進展の解説として、あるいはフラクタルが様々な局面でいかに応用されているかの紹介として、役に立つことになれば幸いである。本書ではフラクタルに関連する様々な数学を紹介している。とりわけ第 II 部では、個々の話題を深めるよりも、どのような話題が現在あるのかについて広範に述べている。具体的な内容の選択については、著者の趣味が少なからず反映されている。その結果、フラクタルの応用として重要な話題のいくつかは本書に盛り込まれていない。本書の内容は、ごく最近の成果も含むが、20 世紀初頭に確立されたものも多い。

すべての章末に「注と文献」を付けた。参考文献は、遺漏なく挙げているわけではない。実際、さまざまな話題に関する完全な文献集を付けるとなると膨大な量になってしまう。それでも、それぞれの話題についてさらに詳しく調べたい場合に最小限必要な情報は盛り込むよう配慮した。

大学院、または、ことによると学部最終年が対象のフラクタル幾何学の講義の教科書として、本書を利用することができる。その助けとなるように、すべての章末に演習問題を用意した。難解な節や証明には星印を付けてあるので、学習の進行を妨げるようであれば省略しても構わない。

本書の数学的な難易度については、数学あるいは物理学専攻の大学院生が理解できるように、あるいは熱心な学部学生なら大部分が理解できるように心掛けた。とりわけ測度論の概念については、測度を集合上の質量分布と捉えれば十分であるように配慮した。本書においては、ある種の（直観的には当たり前の）性質をもつ測度が存在することを認めてしまえば、細かい測度論の知識はほとんど必要ない。

結果は常に正確に記述するが、それは誤解をさけるためである。おおむね厳密に話を展開するが、難解な証明や技術的に困難な証明については、概略のみの紹介に留めるか、あるいは完全に省略した（ただし、難解な証明であっても、そのままの形では他の文献に記載されていないものについては記述する。特に、大きな共通部分をもつ集合とランダムフラクタルについての証明は省略しなかった）。多くの証明の本質は幾何学的なものであり、適切な図が理解を助ける。いくつかの図は本書で用意してあるが、読者が自ら図を描

くことでより理解が深まるであろう。

第1章は、集合や関数の理論など、本書を通して使われるいくつかの基本的な数学の概念や記号の概説から始まる。この章に測度論と質量分布入門の節を設けたが、本書を読み進める上で必要十分な内容を盛り込めたと考えている。また、確率論の節も設けてあり、ランダムフラクタルとブラウン運動の章で役に立つであろう。

広い分野にわたる話題を取り上げているので、最初から終わりまで記号の使い方を一貫性のあるものにするのは困難であった。本書の中での一貫性を保つために、一般に用いられる記法とは異なったものを敢えて使った箇所があることをおことわりしておく。

このところフラクタルは、コンピュータグラフィクスを用いた美術のひとつの形式として、あるいは様々な物理現象のモデルとして、至る所で用いられるようになった。数学的な知見なしにフラクタルを鑑賞することも可能ではある。しかしながら、その基礎にある数学を通してみることで、広範な領域にわたって応用をもつフラクタルに対して、より深い理解を得ることができるのである。いわゆる「フラクタルの美 (the beauty of fractals)」は数学の中にこそあると、著者は信じている。

この本を準備する際にご協力頂いた方々に感謝したい。Philip Drazin 氏と Geoffrey Grimmett 氏から原稿の一部についての有益な助言を頂いた。Peter Shiarly 氏からコンピュータを用いた描画についての貴重な協力を頂き、Aidan Foss 氏にいくつかの図を作製して頂いた。本書の出版にあたり John Wiley & Sons 社の Charlotte Farmer, Jackie Cowling と Stuart Gale の諸氏には大変お世話になった。

David Marsh 氏には、原稿に関するたくさんのコメントとコンピュータ画像の制作、さらにすべての原稿をタイプして頂き、特に感謝の意を表したい。

最後に、本書の草稿を読み、支え励ましてくれた妻 Isobel に感謝する。

Kenneth J. Falconer
ブリストルにて、1989年4月

第 2 版への序文

本書 *Fractal Geometry—Mathematical Foundations and Applications* の初版刊行から 13 年が経過した。その間に、フラクタルに対する関心はあらゆるレベルで高まりつつあり、フラクタルの数学と応用は大きく進展した。もともと本書は、フラクタルに関する数学の知識を必要とする数学者や科学者を対象に書かれたものである。この数年来の数学教育における関心や学習方法の変化に伴い、多くの大学で学部や大学院の科目にフラクタル幾何学が取り入れるようになり、この本の一部に準拠するところもかなりの数になる。

以上のような事情を鑑みて、次の 2 つのことを主な目的に改訂を行った。ひとつは、この分野における最近の成果を紹介し、それに関連する文献を新たに付け加えたことである。もうひとつは、本書を教科書として使う学生諸君に配慮して、理解を助けるためにより詳しく記述し、演習問題を増やすことである。

また、本書の各部を書き直した。特に、マルチフラクタル理論は初版刊行当時に比べてかなり進んでいることから、「マルチフラクタル測度」の章については完全に書き直した。さらに、注と参考文献を更新した。小さな変更や修正や追加を数多く行ない、記号や用語を現在の標準的な用法に沿って変更した。洗練された最新のコンピュータ技術を活かして、図表の多くを入れ替えた。節や数式や図の番号付けは、可能な限り初版と同じにしてあるので、本書への参照はそのままで有効である。

各章末の演習問題を追加してある。演習問題の解答および追加資料は、つぎのホームページから入手できる：<http://www.wileyurope.com/fractal>

1997 年に本書の続編『フラクタル幾何学の技法』(*Techniques in Fractal Geometry*) を刊行して、最新のフラクタル研究におけるさまざまな技法や概念を紹介した。本書の範囲を超えてフラクタルに関する数学を勉強したい読

者には、この続編が役に立つであろう。

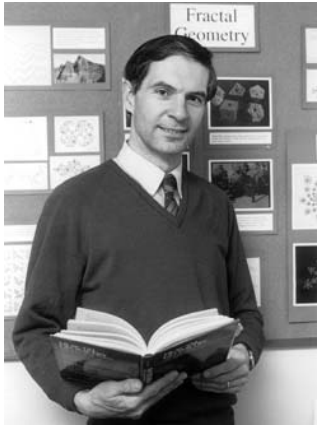
本書の執筆にあたり建設的な提案をして頂いたすべての方々に心から感謝の意を表したい。とりわけ、今回の改訂では Carmen Fernández 氏, Gwyneth Stallard 氏と Alex Cain 氏のお世話になった。John Wiley & Sons 社のスタッフには、本書への継続的な支援をして頂きとても感謝している。特に、Rob Calver 氏と Lucy Bryan 氏にはこの第 2 版の出版にあたりお世話になり、John O'Connor 氏と Louise Page 氏には表紙のデザインをして頂き、感謝している。

Kenneth J. Falconer
セントアンドリュースにて、2003 年 1 月

日本語版に寄せて

『フラクタル幾何学』が日本語に翻訳されて嬉しく思います。服部久美子先生と村井浄信先生には、フラクタル幾何学の専門家として、ていねいな翻訳の労をとっていただいたことにたいへん感謝しています。この本の初版を1989年に書いていたときに比べて、フラクタル数学を、研究分野としても高等教育の科目としても、身近な対象とみなす方々が飛躍的に増えました。本書の日本語版が、このわくわくする分野にさらに多くの方々が目を向けるきっかけになることを期待しております。

ケネス・ファルコナー
Kenneth Falconer



講義に使用する際の注意

この本は話題が満載であり，標準的な長さのフラクタル幾何学の講義で扱うには多すぎるであろう．学部あるいは大学院の講義のテキストとして本書を利用するときは，何に焦点を絞るかによって適切にセクションを選択することをお勧めしたい．特に，数学科の学生用講義のテキストとしては，以下の節を選択するとよいと思われる．

(a) 数学の基礎知識

1.1 集合論の基礎； 1.2 関数と極限； 1.3 測度と質量分布．

(b) ボックス次元

3.1 ボックス次元； 3.2 ボックス次元の性質．

(c) ハウスドルフ測度および次元

2.1 ハウスドルフ測度； 2.2 ハウスドルフ次元； 2.3 ハウスドルフ次元の計算； 4.1 次元計算の基本的な方法．

(d) 反復関数系

9.1 反復関数系； 9.2 自己相似集合の次元； 9.3 いくつかの変形版；
10.2 連分数の例．

(e) 関数のグラフ

11.1 グラフの次元，ワイエルシュトラス関数と自己アフィングラフ．

(f) 力学系

13.1 反発点と反復関数系； 13.2 ロジスティック写像．

(g) 複素関数の反復

14.1 ジュリア集合の一般論； 14.2 マンデルブロー集合； 14.3 2 次関数のジュリア集合．