

# 目 次

序 文	v
第 1 部 フェルマーからルジャンドルまで	
第 1 章 創始者たち	1
1.1 数論のはじまり	1
1.2 フェルマーの数学的背景	6
1.3 ピタゴラス数	9
追記：整数の性質	12
第 2 章 フェルマー	15
2.1 フェルマー (1601–1665)	15
2.2 無限降下法	16
2.3 フェルマーの最終定理	18
2.4 ペル方程式	20
2.5 $y^3 = x^2 + k$	23
2.6 平方和	24
2.7 完全数とフェルマーの小定理	26
2.8 フェルマーの誤り	28
第 3 章 オイラー	29
3.1 オイラー	29
3.2 数の分割	32

3.3	解析的整数論の始まり；素数, ゼータ関数, ベルヌーイ数	35
3.4	数論的関数	44
3.5	代数的整数論の始まり	46
<b>第4章</b>	<b>オイラーからラグランジュへ；連分数の理論</b>	<b>51</b>
4.1	導入	51
4.2	基礎概念：有限連分数と無限連分数	52
4.3	初期の歴史	58
4.4	有限連分数の代数	59
4.5	有限連分数の計算	63
4.6	無限連分数	67
4.7	ディオファントス近似と幾何	71
4.8	2次の無理数	75
4.9	ペル方程式	80
4.10	一般化	83
<b>第5章</b>	<b>ラグランジュ</b>	<b>87</b>
5.1	ラグランジュとその業績	87
5.2	2次形式	89
<b>第6章</b>	<b>ルジャンドル</b>	<b>93</b>
6.1	ルジャンドル	93
6.2	円錐曲線上の有理点	94
6.3	素数の分布	94
6.4	平方剰余と相互法則	95
<b>第2部</b>	<b>ガウスと『整数論』</b>	
<b>第7章</b>	<b>ガウス</b>	<b>99</b>
7.1	ガウスとその業績	99
7.2	『整数論』概観	109

<b>第 8 章 合同式の理論 [1]</b>	<b>111</b>
8.1 『整数論』第 1 節	111
8.2 剰余類	116
8.3 合同と代数構造	118
8.4 応用	120
8.5 1 次合同式	124
<b>第 9 章 合同式の理論 [2]</b>	<b>127</b>
9.1 導入	127
9.2 既約剰余類	127
9.3 $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ の構造	129
9.4 高次合同式	132
9.5 高次合同式と多項式関数	138
9.6 多変数の合同式；シュヴァレーの定理	141
9.7 合同式の解と方程式の解；ハッセの原理	143
<b>第 10 章 原始根と累乗剰余</b>	<b>145</b>
10.1 原始根	145
10.2 指数	148
10.3 $k$ 次の累乗剰余	149
<b>第 11 章 2 次合同式</b>	<b>153</b>
11.1 導入	153
11.2 平方剰余の初歩的性質	154
11.3 ガウスの補題	156
11.4 $\left(\frac{a}{p}\right)$ の計算	158
11.5 平方剰余の相互法則 1	163
11.6 平方剰余の相互法則 2	168
11.7 歴史と他の証明	174
11.8 ヤコビの記号	177

**第 12 章 2 元 2 次形式 [1] : 算術的理論 179**

12.1 導入	179
12.2 形式の同値	180
12.3 行列表現と判別式	182
12.4 被約形式と同値類の個数	184
12.5 表現と同値	187
12.6 表現と平方剰余	188
12.7 正式同値	192
12.8 定符号形式と不定符号形式	193
12.9 正の定符号形式	195
12.10 原始的形式と類数	197

**第 13 章 2 元 2 次形式 [2] : 幾何学的理論 203**

13.1 導入	203
13.2 2 次形式の根	204
13.3 正の定符号形式と上半平面	208
13.4 1 次分数変換	211
13.5 基本領域	212
13.6 形式と上半平面再考	220
13.7 自己同型と表現の個数	222
13.8 不定符号形式, $D > 0$	225
13.9 2 次形式の合成	229
13.10 種	231
13.11 『整数論』第 5 節および第 6 節	233

**第 14 章 円分論 235**

14.1 『整数論』第 7 節への導入	235
14.2 作図可能性と方程式論	239
14.3 正五角形とガウス周期	241
14.4 平方剰余の相互法則に戻って	244
14.5 合同式の解の個数; 有限体上の方程式	254

14.6 『整数論』に関する最後の注意	255
---------------------	-----

### 第3部 代数的整数論

#### 第15章 代数的整数論〔1〕：ガウス整数と4次剰余の相互法則 257

15.1 ガウスと4次剰余の相互法則	257
15.2 ガウス整数	262
15.3 合同式と4次剰余の相互法則	268
15.4 $\mathbf{Z}[i]$ のゼータ関数と $L$ 関数	272

#### 第16章 代数的整数論〔2〕：代数的数と2次体 277

16.1 代数的整数論の発展	277
16.2 代数的整数	288
16.3 2次体	290
16.4 2次の代数的整数	291
16.5 幾何学的表現, 可約性と単元	295
16.6 2次体における素因数分解	299
16.7 ユークリッド整域と一意分解	300
16.8 非一意分解性とイデアル	303

#### 第17章 代数的整数論〔3〕：2次体のイデアル 307

17.1 $I_d$ におけるイデアルの算術	307
17.2 格子とイデアル	310
追記：格子	314
17.3 イデアルのさらなる算術	316
17.4 イデアルの一意分解性	318
17.5 一意分解の応用	322
17.6 有理素数の素因数分解	324
17.7 類構造と類数	326
17.8 類数の有限性；イデアルのノルム	332
17.9 基底と判別式	336
17.10 形式と体の間の対応	338

17.11	対応の応用	344
17.12	有理素数の分解再考	346
17.13	一般相互法則	352
	追記：ディリクレと19世紀の数論	354

## 第4部 曲線の算術

### 第18章 曲線の算術〔1〕：有理点と平面代数曲線 357

18.1	導入	357
18.2	直線	359
18.3	円錐曲線	360
18.4	3次曲線と幾何学的形式でのモーデルの定理	365
18.5	射影幾何学の必要性	369
18.6	実射影平面；同次座標	372
18.7	射影平面の代数曲線	377
18.8	体上の幾何学；高次元と双対性	384

### 第19章 曲線の算術〔2〕：有理点と楕円曲線 389

19.1	導入	389
19.2	曲線の交差；ベズーの定理	389
19.3	群の法則と代数的形式でのモーデルの定理	393
19.4	双有理同値；ワイエルシュトラス標準形	396
19.5	特異点と種数	401
19.6	楕円曲線と群の法則	407
19.7	楕円関数と楕円曲線	414
19.8	有限位数の複素数点	419
19.9	初期の歴史	421

### 第20章 曲線の算術〔3〕：20世紀 431

20.1	ポアソナレからヴェイユへ	431
20.2	有限位数の点；ルッツ・ナゲルの定理	437
20.3	定理のやさしい部分	440

20.4	定理の難しい部分	441
20.5	モデルの定理；証明の概要	449
20.6	いくつかの予備的結果	453
20.7	高さ関数	456
20.8	モデル・ヴェイユの弱定理	461
20.9	有限体上の方程式；曲線のゼータ関数と $L$ 関数	466
20.10	虚数乗法	469

## 第5部 その他の話題

### 第21章 無理数と超越数, ディオファントス近似 **473**

21.1	初期の歴史	473
21.2	オイラーからディリクレまで	474
21.3	リウヴィルからヒルベルトへ；超越数論の始まり	479
21.4	同時近似；クロネッカーの定理	487
21.5	トゥエ；ディオファントス近似とディオファントス方程式	489
21.6	20世紀	493
21.7	他の結果と問題	495
21.8	文献	497

### 第22章 数の幾何学 **499**

22.1	問題の動機；2次形式	499
22.2	ミンコフスキーの基本定理	502
22.3	格子に対するミンコフスキーの定理	508
22.4	2次形式に戻って	513
22.5	2つおよび4つの平方数の和	515
22.6	1次形式	519
22.7	1次形式の和と積；八面体	521
22.8	ゲージ関数；凸体の方程式	525
22.9	逐次最小	531
22.10	他の方向性	532

<b>第 23 章</b>	<b><math>p</math> 進数と付値</b>	<b>533</b>
23.1	歴史	533
23.2	$p$ 進数；形式ばらない導入	534
23.3	正式な展開	542
23.4	収束	546
23.5	合同と $p$ 進数	552
23.6	ハッセの原理；ハッセ・ミンコフスキーの定理	554
23.7	付値と代数的整数論	560
<b>参考文献</b>		<b>563</b>
<b>訳者あとがき</b>		<b>583</b>
<b>索 引</b>		<b>585</b>