まえがき

ベクトル解析の分野に関する書物のほとんどは，3 次元ユークリッドベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ あるいはその一般化である n 次元ユークリッドベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ 上のベクトル解析に限定されている．しかも，多くの場合，一見無関係に見える個々の事実の羅列と，公式を使いこなすための具体的な計算練習に終始するのが常である．だが，これでは，ほとんどの学習者は，ベクトル解析の根底にある統一的な原理や自律的で有機的な思考の流れを把握するにはいたらないであろうし，それらの存在の予感さえもちえないかもしれない．

本書の 1 章で示すように，$\mathbb{R}^n$ のベクトル構造は，普遍的な意味でのベクトル空間という理念（イデア）に昇華される．この理念の現れとして，ベクトル空間をその要素とする “ 無限宇宙 ” とでもよぶべき，数学的理念界の壮麗な領界が見出される．この観点から言えば，$\mathbb{R}^n$ は，ベクトル空間の単なる一例であり，この領界への 1 つの入り口にすぎない．

本書の目的は，読者を，いま言及した，数学的理念界の壮麗な領界の一部へと案内し，ベクトル解析学を一望のもとに統一的に生き生きと俯瞰できる，より高次の視点を示唆することである．ただし，紙数の関係上，本書でできることは，そこへいたる，1 つの道を提示することだけである．だが，本書が提供しようとする，ベクトル空間界に関する眺望は，そこに含まれる内容をひとたび実体験的に手にいれれば，現代数学の他の分野や現代的な数理物理学を学ぶのにも本質的な意味で役立つような，そういった実質性を有する眺望である．それは，真に哲学的な意味での自然認識あるいは宇宙認識にとっても重要な基礎の 1 つを提供するであろう．だが，そのためには，読者に対してもそれなりの準備が要求される．比喩的に言えば，登山をするのに，その山に応じた準備と装備が必要であるのと同じである．すなわち，本書を読むための予備知識としては，大学の理工系の 2 年次くらいまでに習う微分積分学（多変数関数，偏

微分，多重積分，$\mathbb{R}^3$ における曲線や曲面，グリーン，ガウス，ストークスの定理等を含む）と線形代数学を前提とする[1]．この意味では，本書は，ベクトル空間上の解析学の上級コースのはじめに位置するものである．

本書の主眼は，その題が示すように，現代的なベクトル解析学の原理的な側面を解説することにある．応用にしても，個別的・具体的な問題ではなく，自然・宇宙が，ベクトル解析学の普遍的諸原理を，物理現象の数学的諸原理として，いかに叡智に満ちた仕方で使用しているかをより高次の観点から認識するということに力点が置かれている．この点は，誤解のないようお願いする．

本書を読むにあたっては，$\mathbb{R}^3$ や $\mathbb{R}^n$ での経験が多ければ多いほどよい．その分だけ，読者は，精神的に報われるであろうし，本書により大きな価値を見出すはずである．また，論理的思考を十分に積んでいること，および数学における抽象的・普遍的思考にある程度慣れていることも必要である．ただし，本書は，数学における抽象的・普遍的思考を鍛えるという側面も備えているので，勇気と強い意志さえあれば，抽象的・普遍的な思考の仕方について，あまり経験がなくても問題はないと思う．

この本の読者には言わずもがなのことであろうが，念のために申し添えておくと，本書だけでなく数学書を読むにあたっては，紙と鉛筆（ペン）を傍らにおいて，全力をつくして思考し，本の中で主張されている事柄はすべて，原則として，自分の“頭”と“手”で検証しながら読むという態度で臨んでいただきたい．数学書のよいところはそれが可能であるということにある[2]．また，演習問題も，はじめは，解答を見ないでやることをお勧めしたい．演習問題を解くことは，自分の理解度を知る上で重要であるし，思考のよい訓練にもなる（ただし，本書でとりあげた演習問題は簡単すぎると感じる読者もおられるかもしれない）．

最後に，本書の内容について，若干の注意をうながしておきたい．本書は，基本的に，第１章で提示するベクトル空間の公理系から導かれる普遍的な諸事実を論述するものである．単一の公理系から，これほど豊かな理論――本書ではその一部しか記述できない――が展開されるというのは実に驚嘆に値する．

[1] 微分積分学については，たとえば，黒田成俊『微分積分』（共立出版，2002）と同程度の内容，線形代数学に関しては，たとえば，佐武一郎『線形代数』（共立出版，1997）や同『線型代数学』（裳華房，32 版，1976）と同程度の内容．

[2] 数学の知識は，それがいかに難しく，高等に見える定理であっても，各人にとって，原理的な意味で，いつでもどこでも，検証可能である．この意味で，数学は，他の諸学問と一線を画し，万人に開かれた，時間と物理的空間を超える，永遠の真理の世界に関わる．

この驚きとともに崇高な感情がこみあげてくるのは筆者だけではあるまい．哲学的には，ベクトル空間という理念は，まさに，存在の源泉の１つを表す元型的理念とよぶにふさわしいものなのである[3]．

第１章から第３章までは，ベクトル空間の純代数的構造に関わる事柄を論じる．第１章で示すように，ベクトル空間は，有限次元と無限次元の２つの範疇にわけられる．本書の特色の１つは，有限次元だけでなく，無限次元の場合も扱うことである．これは，本書の先にあるヒルベルト空間論やバナッハ空間論を見越してのことである．これによって，これらの理論への参入がより容易になるであろう．

ところで，ベクトル空間がもちうる構造は，純代数的構造だけではない．純代数的構造に計量的構造が加わることにより，ベクトル空間は，一段と豊かな“響き”をもち始め，より豊饒な（形而上的）存在の次元が立ち現れてくる．だが，通常のベクトル空間論で扱う計量は，ほとんどの場合，内積とよばれる正値計量である．しかし，とらわれのない観点に立つならば，計量を正値計量に限る，アプリオリな必然性はない．そこで，本書では，不定計量のベクトル空間も扱う．ただし，ベクトル空間の位相が重要な働きをする，曲線論や場の理論（第６章から第９章）では，本書の入門的性格を考慮して，不定計量ベクトル空間の次元は有限の場合だけを扱う．

最後の章では，物理学への応用として，古典力学，特殊相対性理論，古典電磁気学，流体力学をとりあげ，本書のような，座標から自由な絶対的・普遍的アプローチが，物理学の諸原理をいかに簡潔かつ明晰にとらえることを可能にするかを示す．この章は，物理学理論の絶対的・本質的構造に興味のある人々に役立つことを願って書かれたものである．

2005 年仲秋の名月の頃，札幌の寓居にて
新 井 朝 雄

[3] より詳しくは，拙著『物理現象の数学的諸原理』（共立出版，2003）の序章を参照．