「組合せゲーム理論入門—勝利の方程式」
章末問題解答集

Michael H. Albert
Richard J. Nowakowski
David Wolfe
著

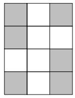
川辺治之
訳

First Published in USA by A. K. Peters, Ltd.

Authorized translation from English language edition published by AK Peters, part of Taylor & Francis Group LLC.

第 0 章

1. 次の局面を考えます．

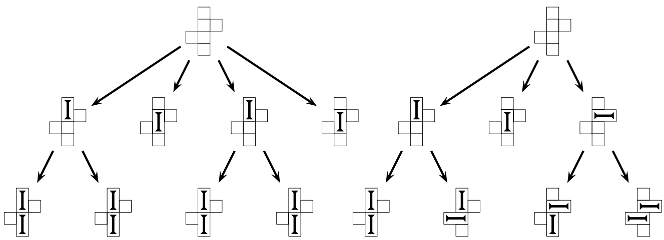


(a) これを**クラム**および**ドミナリング**の局面とするときの，それぞれのゲーム木を描いてください．ゲーム木の葉（最下段）に置かれる局面は，どちらの対局者も打つ手がない局面となっていなければなりません．ある二つの左（または右）選択肢が対称変換（回転または裏返し）によって同一となるならば，一方を省略してかまいません．

(b) **ドミナリング**では，ドミノ牌を縦向きに置く対局者が先手番のときはどちらが勝つでしょうか．横向きに置く対局者が先手番のときはどちらが勝つでしょうか．**クラム**では，どちらが勝つでしょうか．

解答

(a) この**クラム**の盤では，ドミノ牌を横向きに置いて残ったマスは，ドミノ牌を縦向きに置いて残ったマスと同じ形になるので，ゲーム木にはドミノ牌を縦向きに置く手だけを描いています．



(b) **ドミナリング**では，ドミノ牌を縦向きに置く対局者は，ドミノ牌を盤の中央に置くことでただちに勝つことができます．一方，ドミノ牌を横向きに置く対局者には勝つための第 1 手はありません．**クラム**では，先手番の対局者が盤の中央にドミノ牌を縦向きに置くことで勝ちとなります．

2. 8×8 のチェス盤を 2 面使って**ドミナリング**（または**クラム**）の対局をします．それぞれの手番では，どちらの盤に手を打ってもかまいません．（しかしどちらか一方だけです．）このとき，後手番の対局者が勝つことを示してくだ

さい．

解答

後手番の対局者は，**物真似戦略**を使って勝つことができます．後手番の対局者は，二つ目の盤の局面がつねに一つ目の盤の局面を 90° 回転させたものになるように手を打ちます．具体的には，先手番の対局者がどちらの盤に手を打ったとしても，後手番の対局者はもう一方の盤に対応する応手を打ち，回転させて二つの盤が 90° 一致するように保ちつづけます．

3. トランプの同じマークの A から 5 までを表向きに机のうえに並べて，次のようなゲームをします．対局者は交互にそのなかから 1 枚を選び，それを札の列の右端に付け加えていきます．もし，そのカードの並びが昇順または降順に並ぶ 3 枚を含めばゲームは終了し，最後に札を置いた対局者の勝ちとなります．ただし，昇順または降順に並ぶ 3 枚は連続して並ばなくてもよいものとします．たとえば，札の列が $4, 5, 2, 1$ となっているとき，3 枚の札 $4, 2, 1$ が降順に並んでいます．

   (a) このゲームが組合せゲームの定義を満たしていることを示してください．（このゲームには引き分けがないことを示すことが必要です．）
   (b) このゲームでは，先手番の対局者が必ず勝つことを示してください．

解答

(a) あきらかに，このゲームで打つことのできる手は有限で，二人の対局者がゲームに関するすべての情報をもち，偶然に左右されることはありません．ゲームが引き分けとなるのは，並べられた 5 枚の札のなかに昇順または降順に並ぶ 3 枚の札がないときだけです．しかし，そのような局面で 1（および 5）がどの位置に置かれているかを考えると，このような局面は起こりえないことがわかります．まず，1 の札が 1 番目か 2 番目に置かれた（$1abcd$ または $d1abc$）とすると，abc が降順に並んでいないのであれば，この局面は昇順に並ぶ三つの数があることになります．同様に，1 の札が 4 番目か 5 番目に置かれた（$abc1d$ または $abcd1$）とすると，abc が昇順に並んでいないのであれば，この局面は降順に並ぶ三つの数があることになります．つまり，降順または昇順に 3 枚が並ぶこ

とを避けるためには，1 の札は 5 枚の中央に置かれなければなりません．これとまったく同じ議論によって，5 の札もまた 5 枚の中央に置かれなければなりませんが，これは不可能です．この一般的な結果（任意の互いに相異なる $nk+1$ 個の値の並びに，長さ $n+1$ の昇順の並びまたは長さ $n+1$ の降順の並びが含まれる）は，エルデシュ (Erdős)-セケレシュ (Szekeres) の定理と呼ばれています．

(b) 先手番の対局者は，第 1 手で 3 の札を置くことで勝つことができます．後手番の対局者は，次の手で 1 または 5 の札を置くしかありません．（そうでなければ，先手番の対局者は次の手番で勝つことになります.）すると，先手番の対局者は，これに 315 または 351 と応手します．これに対して，後手番の対局者は次の手で勝つことができません．つまり，先手番の対局者は最後の札を置いて勝つことになります．

4. いくつかの石の山から始めて，そのどれかの山に対して，次のどちらかの手を打つことができます．ただし，n をその山に含まれる石の個数とします．

- n が 2 のベキでないならば，その山から n 以下で最大の 2 のベキの個数だけ石を取り除く．
- n が偶数ならば，その山の半分の石を取り除く．

標準形のゲームでは，どちらが勝つでしょうか．逆形の場合はどうでしょうか．

解答

石の個数 n を 2 進展開すると，許される手は，n が 2 のべきでないならばその 2 進展開の先頭の 1 を取り除くこと，および 2 進展開の末尾の 0 を取り除くことです．このゲームの手数は，n を 2 進展開したときに先頭に並ぶ 1 の個数と末尾に並ぶ 0 の個数の和から 1 を引いた値に一致します．それゆえ，ゲームの手数が奇数のときは，正規形では先手番の対局者の勝ちとなり，逆形では先手番の対局者の負けとなります．ゲームの手数が偶数のときは，正規形では先手番の対局者の負けとなり，逆形では先手番の対局者の勝ちとなります．

5. この問題の目的は，本書では**対象としない**ゲームがどんなものかを知ってもらうことです．二人で 2×2 行列を用いる**零和ゲーム**を対戦します．（零和

というのは，一方の参加者が負ければ，もう一方の参加者は同じだけ勝つという意味です.）参加者には正の数を成分とする 2×2 行列を提示します．参加者 A はその行列のどちらかの行を，参加者 B はその行列のどちらかの列を，同時に選びます．この両者の選択によって，行列の一つの成分が決まります．B はこの成分の額だけ A に支払わなければなりません．たとえば，次の行列が与えられたとします．

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

もし，A が $\frac{1}{4}$ の確率で 1 行目を選ぶとすると，B がどのような戦略をとっても，A は平均して \$2.50 を得られることが**保証**されます．一方，B が同じ確率で二つの列を選ぶとすると，A がどのような戦略をとっても，B は平均して \$2.50 を支払うことが**保証**されます．さらに，どちらの参加者もこれよりもよい結果を保証することはできないので，このゲームで B が A に支払う見込み額は \$2.50 となります．

一般に，ゲームの利得行列を

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とするとき，B が A に支払うことになる見込み額を a，b，c および d の関数として表してください．

（いくつかの場合に分ける必要があるでしょう.）

解答

A は，B がある列を選ぶことがほかの列を選ぶことより有利とならないように，行を選ぶべきです．A が 1 行目を選ぶ確率を p とし，B が 1 列目を選ぶ確率を q とすると，A が獲得できる額は

$$q[pa+(1-p)c]+(1-q)[pb+(1-p)d]$$

となります．A に保証された平均支払額を求めるためには，A は q の選択に対して最悪の場合を考えて p を決めなければなりません．支払額は q の線形関数なので，最悪の場合は q が 0 または 1 のときです．具体的には，平均して

$$\min\{pa+(1-p)c, pb+(1-p)d\}$$

が A に支払われることが保証されます．この関数は $p=0$ または $p=1$ または

$$pa+(1-p)c=pb+(1-p)d$$

すなわち

$$p=\frac{d-c}{a-b-c+d}$$

のときに最大値となる可能性があります．この p の値を前述の保証される平均支払額に代入すると，

$$\max\begin{cases}\min(a,b) & (p \text{ として } 1 \text{ を選んだとき})\\ \min(c,d) & (p \text{ として } 0 \text{ を選んだとき})\\ \dfrac{ad-bc}{a-b-c+d} & \left(p \text{ として } \dfrac{d-c}{a-b-c+d} \text{ を選んだとき}\right)\end{cases}$$

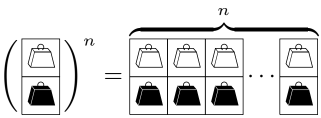
となります．そして支払い見込み額は次のとおりです．

$$\max\begin{cases}\min(a,b) & (a \geq c \text{ かつ } b \geq d \text{ のとき})\\ \min(c,d) & (c \geq a \text{ かつ } d \geq b \text{ のとき})\\ \max(a,c) & (a \leq b \text{ かつ } c \leq d \text{ のとき})\\ \max(b,d) & (b \leq a \text{ かつ } d \leq c \text{ のとき})\\ \dfrac{ad-bc}{a-b-c+d} & (\text{そのほかのとき})\end{cases}$$

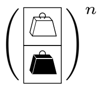
第 1 章

いくつかの問題を解くためには，グラフ理論の基礎知識が必要となります．とくにオイラーの定理（定理 A.7）（269 ページ）が役立つでしょう．

1. 次の $2 \times n$ の盤での**クロバー**の局面を考えます．



n を偶数とするとき，

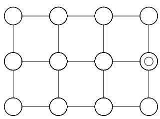


は後手番の勝ちとなることを示してください．（一方，n が 13 以下の奇数のときは，先手番の対局者の勝ちとなることがわかっています．私たちは，n が奇数のときはいつも先手番の対局者の勝ちと予想しています．）

解答

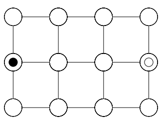
ゲームの開始局面は，駒の色を入れ替えると 180° の回転対称となっています．後手番の対局者は，先手番の対局者が打った手に対して，いつもこの変換を施した位置に手を打つことで，この対称な状態を保つことができます．

2. 次の**コル** (COL) の局面は，左が先手番で勝つことを証明してください．



解答

左はまず次の手を打ちます．



そして以降は，右の手に対して盤を 180° 回転させて得られる手で応手しつづけます．

3. 自分の手番のときに硬貨を 1 枚支払えばその手番を終わることができるという規則を追加して，**糸と硬貨**の対局をします．（「硬貨を 1 枚支払う」というのは，そのゲームでそれまでに得た硬貨を 1 枚捨てるという意味です．）

   (a) 最初に硬貨を得た対局者の勝ちとなることを証明してください．
   (b) 矩形状に $m \times n$ 枚の硬貨が並んだ局面から対局を始めるとき，$m+n$ が偶数ならば後手番の対局者の勝ちとなることを証明してください．
   (c) 同様に $m+n$ が奇数ならば，先手番の勝ちとなることを証明してください．

解答

   (a) 先にルイーズが硬貨を獲得したとき，ルイーズはこの手番をどのように終わればよいでしょうか．いったんこの硬貨のことは忘れて，その局面から先手番の対局者が勝つか引き分けることができるのであれば，ルイーズはその獲得した硬貨を使わずにその手番を終わらせます．一方，その局面から後手番の対局者が勝つのであれば，ルイーズは，その獲得した硬貨を捨ててその手番を終わらせることで勝つことができます．
   (b) 後手番の対局者は，最初の硬貨を獲得するまで 180° 回転した物真似戦略を使ってゲームを進め，硬貨を獲得したら (a) のようにして勝ちます．
   (c) 先手番の対局者は，中央の糸を切って，その後は (b) と同じく 180° 回転した物真似戦略を使ってゲームを進めます．

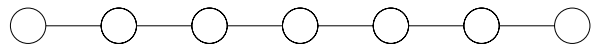
4. 半径 R の円形の机のうえで次のようなゲームをします．対局者は交互に 1 枚の（半径 1 の）硬貨を机のうえに置きます．ただし，すでに置かれている硬貨に触れてはいけませんし，机の縁からはみ出してもいけません[原註 1]．こうして最初に硬貨を置けなくなった対局者の負けとします．どちらの対局者が勝つかを R の関数として求めてください．

解答

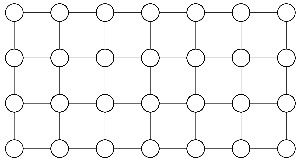
$R \geq 1$ ならば，先手番の対局者は机の中心に硬貨を置いて，その後は 180° 回転した物真似戦略を使って勝つことができます．

[原註 1] 対局者は非常に精密に硬貨を配置できると仮定してください．

5. 次の図のような頂点数 n の帯状の盤での**スノート** (SNORT) はどちらが勝つでしょうか．



$m \times n$ の頂点からなる格子状の盤の場合はどうでしょうか．



解答

帯状の盤も含めて，m または n のどちらかが奇数となるときは，先手番の対局者は中央の頂点（頂点の総数が奇数の場合）または中央の二つの頂点の一方（頂点の総数が偶数の場合）に色を塗り，以降は 180° 回転した物真似戦略を使って勝つことができます．しかし，m および n がどちらも偶数となるときは，後手番の対局者が最初から 180° 回転した物真似戦略を使って勝つことができます．

6. **足して 15**(ADD-TO-15) は，**三つで 15**（20 ページ）と似ていますが，先に**何枚**かの札の合計が 15 になった対局者の勝ちとなります．このゲームで双方の対局者が最善を尽くしたとすると，先手番の対局者の勝ちとなるでしょうか．後手番の対局者の勝ちでしょうか．それとも引き分けに終わるでしょうか．

解答

先手番の対局者の勝ちとなります．先手番のアリスは，まず 6 を取ります．後手番のボブは 9 を取らなければ負けてしまいます．次にアリスは 8 を取り，次の手番では 1 または 7 を取って勝ちます．

7. これは有向グラフの頂点を消していくゲームです．対局者は交互に入次数が偶数の頂点（およびその頂点を含むすべての辺）を一つ消します．すべての辺が根に向かっている有向木を開始局面とするとき，どちらの対局者が勝つか決定してください．

解答

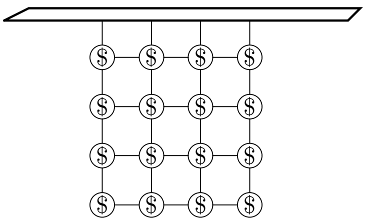
頂点が一つでもあれば，葉（入次数が 0）となる頂点が必ず存在するので，その頂点を消すことができます．つまり，頂点が偶数個のとき，そしてそのときにかぎり，後手番の対局者の勝ちとなります．

8. これは無向グラフの頂点を消していくゲームです．対局者は交互に次数が偶数の頂点（およびその頂点を端点とするすべての辺）を一つ消します．どちらの対局者が勝つかを決定してください．

解答

どんなグラフでも奇数次数の頂点は偶数個となります．つまり，頂点が奇数個のグラフには偶数次数の頂点が少なくとも一つはあり，それを消す手を打つことができます．ちなみに孤立した頂点の次数は 0 なので偶数次数となることに注意してください．それゆえ，頂点が奇数個のとき，そしてそのときにかぎり，先手番の対局者の勝ちとなります．

9. 天井から硬貨の「束」がぶら下がっています．硬貨は，次の図のように他の硬貨や天井と糸でつながっています．対局者は交互に 1 本の糸を切ります．糸を切って先に硬貨を 1 枚でも床に落としてしまった対局者の負けです．双方の対局者が最善を尽くすとき，どちらが勝つでしょうか．



解答

ゲームの局面を，硬貨および天井を頂点とし，それらをつなぐ糸を辺とするグラフと見なします．（どの糸を切ってもどれかの硬貨が床に落ちてしまう）最後の手を打つ直前には，局面は元のグラフの全域木となっています．このグラフは 17 個の頂点をもつので，その全域木はちょうど 16 本の辺をもち，

それまでに $28 - 16 = 12$ 本の糸が切られたことになります．そこで先手番の対局者は，13 手目を打つことになり負けます．

10. スプラウトレット (SPROUTLETTES) はスプラウト (SPROUTS) と同じ手を打ちますが，それぞれの頂点の次数は 2 以下でなければなりません．スプラウトレットではどちらが勝つでしょうか．

解答

n を頂点の個数とします．ゲームの進行中は，それぞれの頂点は経路または閉路に含まれます．次数 1 の頂点 v が単独で現れることはなく，v を端点とする経路のもう一方の端点の次数が 1 となります．それぞれの手によって，頂点の次数の合計は 2 だけ増え，新たに使える頂点は増えないので，ちょうど n 手だけを打つことができます．つまり，このゲームは愛している？ 愛してない？ の変形であり，n が奇数のとき，そしてそのときにかぎり，先手必勝となります．

11. ブリュッセル・スプラウト (BRUSSELS SPROUTS) の必勝戦略を見つけてください．（ヒント：最終的な局面がどうなっているかを書き下して，ゲームが終わるまでに何手かかるかをそこから導いてください．）

解答

ゲームが終わったとき，局面は平面グラフとなります．m をその局面に至るまでの手数とし，c を最初の局面の頂点（= 十字）の個数とします．それぞれの手によって，新しい一つの頂点および二つの辺（どちらの辺も新しい頂点とすでにある頂点をつなぎます）が追加されます．つまり，ゲームのどの段階においても，辺の数は $E = 2m$ で，頂点の数は $V = c + m$ となります．十字の辺がつながっていない腕の数は一定となることに注意すると，ゲームの最終局面では，（辺で囲まれた）それぞれの領域はその内部に十字の腕をちょうど一つだけ含むことになり，領域の数は $R = 4c$ となります．すると，オイラーの多面体定理（定理 A.7）（269 ページ）によって $E - V - R + 2 = 0$ が成り立つので，$2m - (c + m) - 4c + 2 = 0$ となり，これを整理すると $m = 5c - 2$ が得られます．驚くべきことに，最初の局面の十字の個数で手数が決まるのです．つまり，最初の局面の十字の個数が奇数のとき，そしてそのときにか

ぎり，先手必勝となります．

12. スプラウトで何手続くかを，開始局面の頂点数および最終局面で孤立した次数 2 の頂点数の関数として表してください．スプラウトに対しても点と箱の長い連鎖の数と同様の規則を見つけてください．

解答

m をゲームが終わるまでの手数，s を最初の頂点の個数，d を最終局面での次数 2 の頂点の個数とします．ゲームの最終局面では，辺の数は $E = 2m$ となります．それぞれの手によって，新しい頂点が一つ作られるので，$V = s + m$ が成り立ちます．任意のグラフで，頂点の次数の合計は辺の数の 2 倍となるので，$4m = 3(s + m) - d$ が成り立ち，整理すると $m = 3s - d$ となります．s が偶数のときは，先手番の対局者は d を奇数にしようとし，後手番の対局者は d を偶数にしようとします．s が奇数のときは，それぞれの対局者にとって望ましい奇偶性はこれと逆になります．

13. ヘックス (HEX) では先手番の対局者の勝ちとなることを証明してください．文献から証明を見つけてきてもかまいませんが，出典を明記し，自分自身の言葉で議論を組み立てなおしてください．

解答

証明は，定理 1.14 と同じような流れになります．証明の鍵は，引き分けで終わらないことをどのように示すかです．

14. スクエックス (SQUEX) は，ヘックスに似たゲームですが，正方形の盤を使います．対局者は交互に自分の色の駒を盤に置きます．盤上の二つのマスは，それらが辺を共有しているとき，隣接します．黒の目的は，黒の駒が置かれたマスで盤の上辺と下辺をつなぐことです．白の目的は，白の駒が置かれたマスで盤の左辺と右辺をつなぐことです．

   (a) $n \times n$ の盤のスクエックスにおいては，先手番の対局者が勝つか引き分けることを証明してください．
   (b) $n \times n$ の盤のスクエックスで，n がいくつのときに先手番の対局者の勝ちとなるでしょうか．n がいくつのときに引き分けとなるでしょうか．

それぞれの場合に，先手番の対局者が勝つための明示的な戦略および後手番の対局者が引き分けるための明示的な戦略を示して，証明してください．

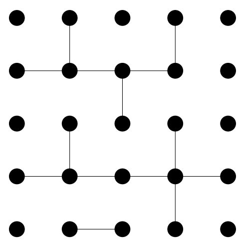
(c) $m \times n$ の盤の**スクエックス**ではどうでしょうか．

解答

スクエックスで先手番の対局者が勝つかまたは引き分けることを示す一つの方法は，定理 1.12 の別証明の議論を使うことです．

1×1 の盤においては，あきらかに先手番の対局者の勝ちです．$1 \times n$ および $m \times 1$ の盤においても，どちらが勝つのかが簡単にわかります．そのほかの大きさの盤においては，後手番の対局者が引き分けることができます．黒を先手番とします．白は任意の隣接する二つの行を選んで，これらの行に対する任意の黒の手に対して，もう一方の（上または下の）行に応手します．これで上辺から下辺につなごうとする黒の駒の道を遮ることができます．こうして白は少なくとも引き分けにもち込むことができます．

15. 次の**点と箱**の局面において，次の手番はアリスです．



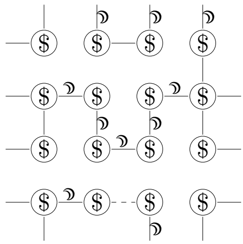
(a) これと等価な**糸と硬貨**の局面を構成してください．

(b) アリスが作るべき長い連鎖の数は偶数か奇数かを求めてください．

(c) この局面から，アリスが勝つための初手をすべて列挙してください．

解答

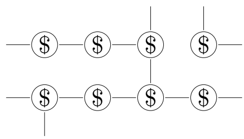
(a) 問題の局面と等価な**糸と硬貨**の次の局面に，ポカおよび勝つための手（破線）を示します．



(b) アリスは，奇数個の長い連鎖を作ろうとします．それを 2 通りの方法で示します．まず，これまでの手数は 14 で偶数となるので，アリスが先手番です．ゲームの開始局面では，箱の個数と打つことのできる手数の和は偶数となり，対局者 1 は勝つためには奇数個の長い連鎖が必要となります．一方，現在の局面からゲームを始めたとすると，16 個（偶数）の箱があり残りの手数は 26（偶数）なので，次の手番の対局者が勝つためには奇数個の長い連鎖が必要となります．

(c) ポカを打つ以外に，中央に長い連鎖を作らせない方法はありません．しかし，左下に長い連鎖を作れないようにして長い連鎖を一つだけにする，ポカでない手が一つあります．アリスは，2 枚の硬貨を犠牲にしてもその手を打つべきです．アリスがこの手を打たなかったならば，ボブは左下隅の硬貨にぶら下がった 2 本の糸の一方を切って，二つ目の長い連鎖を作れることに注意してください．

16. 次の**糸と硬貨**の局面で，あなたの手番だとします．



(a) 勝つことのできる手をすべて列挙してください．

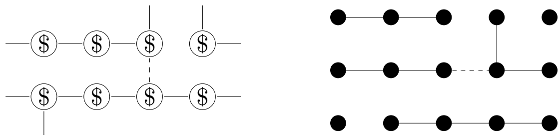
(b) これと等価な**点と箱**の局面を構成してください．

(c) うまくゲームを進めると何個の箱を取ることができるでしょうか．

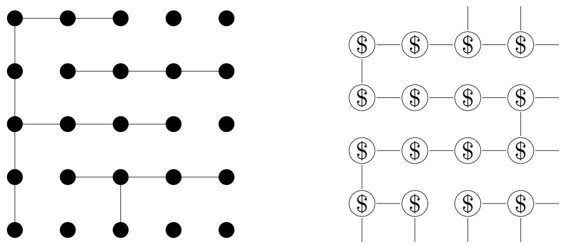
解答

13 本の糸と 8 枚の硬貨に対して $13+8+1$ は偶数なので，次の手番の対局者は偶数個の長い連鎖を作ろうとします．唯一の縦の糸（破線）を切ると，二

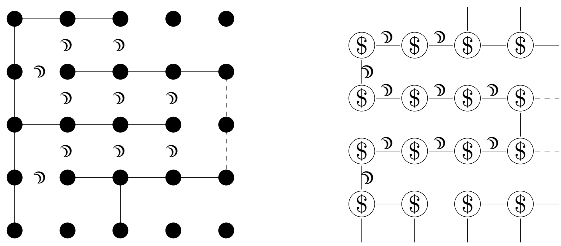
つの長い連鎖ができて目的を達成できます．そのほかの手を打つと，相手は長い連鎖を一つだけにできるので，これが唯一の勝ちにつながる手です．これと等価な**点と箱**の局面では，相手は二つの長い連鎖の一方から二つの箱を取り，また右上の箱も取るので，あなたは 5 対 3 で勝つことができます．



17. 次の**点と箱**の局面で勝つことのできる手をすべて列挙してください．参考のため，これと等価な**糸と硬貨**の局面を右に示します．この局面には 16 枚の硬貨および 24 本の糸があります．



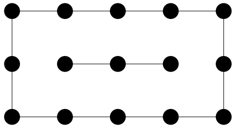
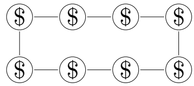
解答



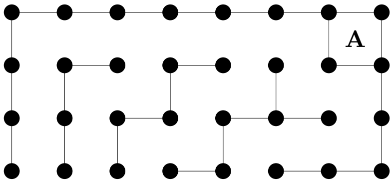
10 個のポカがあり，それらによって長い連鎖は 1 個または 2 個となります．(それより多くなることはありません．) 先手番の対局者が二つの破線のどちらかの手を打ってしまったら，後手番の対局者はそれらの間の縦の糸を切ることで抜け目なく 2 個の長い連鎖を作るでしょう．

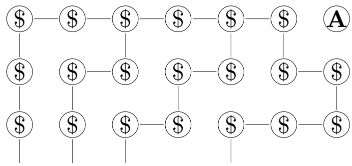
18. 長い連鎖だけの局面以外にも，すべての手がポカであるような**点と箱**（および それと等価な**糸と硬貨**）の局面があります．次の閉路のある局面がその一

例です.

また，数多くの分岐をもつ次の**蛸足**もその例です.





これらの局面を説明するのに定理 1.18 およびその証明が使えるでしょうか．証明の大部分は，この定理の直前の文章で述べられていることに注意してください.

解答

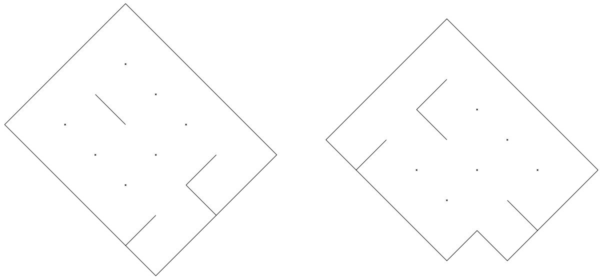
問題で述べているように，これらの局面でのすべての手はポカとなります．定理 1.18 およびその証明中では，それぞれの長い連鎖は硬貨の枚数より糸の本数が 1 だけ大きいので，

$$M^{+} = C + B^{+}$$

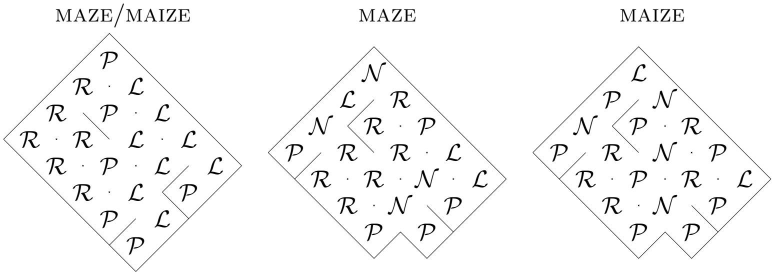
の部分に修正が必要です．閉路は糸の本数と硬貨の枚数が同じなので長い連鎖として数えず, n 本の蛸足は硬貨の枚数より糸の本数が $n-1$ 多いので $n-1$ 個の長い連鎖と見なせば，これらの局面の場合も同じ式が成り立ちます.

第 2 章

1. 次の図をそれぞれメイズ (MAIZE) の局面とするとき，駒を置くことのできるすべての局面の帰結類を求めてください．また，これらがメイズ (MAZE) の局面のときはどうなるでしょうか．



解答



2. 次のそれぞれのゲームに対して，定理 2.13 の集合 A および B を求めてください．

   (a) SUBTRACTION$(2, 3, 4)$
   (b) SUBTRACTION$(1, 3, 6)$
   (c) SUBTRACTION$(2, 3, 6)$
   (d) SUBTRACTION$(2^n : n = 0, 1, 2, \ldots)$
   (e) SUBTRACTION$(2^n : n = 1, 2, \ldots)$

解答

それぞれのゲームについて，$\mathcal{P}$ 局面の集合 A だけを示します．

(a) $A = \{n \mid n \equiv 0, 1 \pmod 6\}$
(b) $A = \{n \mid n \equiv 0, 2, 4 \pmod 9\}$
(c) $A = \{n \mid n \equiv 0, 1, 5 \pmod 9\}$
(d) $A = \{n \mid n \equiv 0 \pmod 3\}$
(e) $A = \{n \mid n \equiv 0, 1 \pmod 6\}$

(a)，(b) および (c) については，機械的に求めることができます．(d) については，$2^n \equiv \pm 1 \pmod 3$ となる（帰納法により簡単に示せます）ので，$n > 1$ の手がなくても結果は変わらないことに注意してください．(e) については，どちらの対局者の手も (2 進表記における)1 の位の値を変えないので，(d) のゲームにおいて 1 の位を無視したものと本質的に同じです．

3. 考察 2.4 を使って，定理 2.13 を帰納的に証明してください．

解答

有限不偏ゲームが与えられたとき，定理 2.13 の条件を満たす分割 (A, B) を一つ定め，このゲームの任意の局面 G を考えます．$G \in A$ ならば，G の選択肢はすべて B に属します．すると帰納法により，すべての選択肢は $\mathcal{N}$ 局面です．つまり，$G \in \mathcal{P}$ が成り立ちます．一方，$G \in B$ ならば，G の選択肢で A に属するものがあります．これも帰納法により，この選択肢は $\mathcal{P}$ 局面です．つまり，$G \in \mathcal{N}$ が成り立ちます．

4. 次のような二人で対局する一山崩しを考えます．n 個の石からなる一つの山に対して，許される手は山にある石の個数の約数（その数自身は除きます）個の石を取り除くことです．（たとえば，$n = 12$ 個の石があるとすると，そこから石を取ったあとには $11, 10, 9, 8$ または 6 個の石が残ります．）山を 1 個の石だけにした対局者の勝ちとします．

(a) 勝つことのできる局面で，勝つための戦略を見つけてください．具体的には，まずどの局面が $\mathcal{P}$ 局面で，どの局面が $\mathcal{N}$ 局面であるかを見分ける必要があります．そして，帰納法を使ってそれを証明してください．

(b) **逆形**ゲームの場合はどうなるでしょうか．逆形ゲームでは，山の石を 1 個にした対局者の負けとなります．

解答

山の石が偶数個のとき，そしてそのときにかぎり，その局面は $\mathcal{P}$ 局面となります．山に偶数個の石があるとすると，先手番の対局者はそこから 1 個の石を取り除き，奇数個の石を残します．（この局面は，帰納法により，$\mathcal{N}$ 局面です.）一方，山に奇数個の石があるとすると，どのような手を打った結果も $\mathcal{P}$ 局面となります．なぜなら，奇数は奇数の約数しかもたないからです．つまり，山の石が奇数個のときは，$\mathcal{N}$ 局面です．

驚くべきことに，**逆形**ゲームでも，山の石が 2 個のときには $\mathcal{N}$ 局面となり，山の石が 3 個のときは $\mathcal{P}$ 局面となることを除いて，正規形ゲームと同じになります．このことは，正規形と同じように示すことができます．ちなみに，現在の山の石が 3 個または 4 個でなければ，どちらの対局者も 2 個以下の石を残すことはできないことに注意してください．つまり，山の石の数が 4 個になったならば，勝つためには 1 個ではなく，2 個の石を取らなければなりません．

5. **欲張りニム** (GREEDY NIM) は**ニム**に似たゲームですが，必ず一番大きな山から石を取らなければなりません．**欲張りニム**の $\mathcal{P}$ 局面および $\mathcal{N}$ 局面を求めてください．

解答

欲張りニムの $\mathcal{P}$ 局面は，その局面にある最も大きい山の数が偶数であるとき，そしてそのときにかぎります．このことは，定理 2.13 を使って示すことができます．明らかに，最も大きい山が偶数個あれば，どのような手もそれを奇数個にします．一方，最も大きい山が奇数個あれば，そのうちの一つの山に対する次の二つの手を考えます．その山の石をすべて取る手と，その山を 2 番目に大きい山と同じ大きさにする手です．この二つの手のどちらか，または両方によって，最も大きい山の数は偶数個になります．

6. （この問題は，例 2.9 を一般化したものです.）正整数 p および非不偏版**一山崩し** SUBTRACTION$(L \mid R)$ で，$|L| = |R|$ およびそれぞれの $x \in L$ に

対して $x + y = p$ となる $y \in R$ が存在するものが与えられたとします．（SUBTRACTION$(1,2,4,7 \,|\, 2,5,7,8)$ および $p = 9$ がその一例です．）n 個の石からなる局面を G_n とすると，G_n の帰結類は周期 p で繰り返すことを証明してください．これは，すべての $n \geq p$ に対して G_n は G_{n-p} と同じ帰結類に属するということです．

解答

$|L| = |R|$ なので，問題で述べている左の手に関する条件は，同じく右の手に関しても成り立ちます．すると，右について述べる次のことは，左についても同じく成り立ちます．G_n において右が後手番で勝ちとなるならば，相手の任意の手 x に対して $y = p - x$ と応手することで，G_{n+p} においても右が後手番で勝ちとなることがわかります．一方，G_n において右が先手番で y と打って勝ちとなるならば，G_{n+p} に対してもそれと同じ手を打つことができます．G_{n-y} において右が後手番で勝つので，G_{n+p-y} においても右は後手番で勝ち，G_{n+p} において右が先手番で勝ちます．これで，G_n および G_{n+p} の帰結類は等しいことが示せました．

7. （星状**カットスロート**の変形）星状グラフ $K_{1,n}$ をいくつか集めたものを考えます．許される手は，一つの頂点およびその頂点を端点とする辺を消すことです．この変形では，辺をもつ星状グラフが一つでもあれば，任意の頂点を取り除くことができます．言い換えると，すべての辺がなくなるまでは，孤立した頂点を取り除くこともできます．孤立した頂点を**星屑**といい，そうでないグラフを**真星**といいます．

   真星が 2 個以上あり，偶数本の辺をもつ星（星屑も含む）が偶数個あるとき，そしてそのときにかぎり，$\mathcal{P}$ 局面となることを示してください．

解答

定理 2.13 を使います．まず，偶数本の辺をもつ星が偶数個あるとします．星屑を含むどれかの星に対して，超新星（例 2.16 を参照してください）によって偶数本の辺をもつ星の個数の奇偶性が入れ替わります．収縮は一つの星の辺の数を 1 本減らすので，偶数本の辺をもつ星の個数の奇偶性が入れ替わります．つまり，どのような手を打っても，偶数本の辺をもつ星は奇数個になります．

一方，偶数本の辺をもつ星が奇数個ならば，任意の星に対する超新星により偶数本の辺をもつ星は偶数個になります．

8. (a) $\mathbf{w} = 35551$ に対して $L(\mathbf{w})$ および $R(\mathbf{w})$ を求めてください．
   (b) 同様に，$\mathbf{w} = 35451$ に対して $L(\mathbf{w})$ および $R(\mathbf{w})$ を求めてください．

   解答

$\mathbf{w}$	$L(\mathbf{w})$	$R(\mathbf{w})$
355	10	3
555	5	5
551	1	10
3555	12	0
5551	0	14
35551	13	17

$\mathbf{w}$	$L(\mathbf{w})$	$R(\mathbf{w})$
354	9	8
545	0	0
451	6	9
3545	0	3
5451	1	0
35451	0	2

   例として，$L(35551)$ をどのように計算するかを詳細に示します．
   $L(35) = 5$ および $R(35) = 0$ より $L(355) = L(35) - R(35) + 5 = 10$ となります．
   $R(355) = R(55) - L(55) + 3 = 3$ より $L(3555) = L(355) - R(355) + 5 = 12$ となります．
   $L(55) = R(55) = 0$ より $L(555) = R(555) = 5$ および $R(3555) = 0$ となります．
   そして最後に $L(35551) = L(3555) - R(3555) + 1 = 13$ となります．
   このうちの一部の計算は省略することができます．たとえば，$L(5551) = 0$ となります．なぜなら，左は後手番で勝つことができるからです．

9. **公約数** (COMMON DIVISOR) **ゲーム**は，いくつかの石の山を使います．許される手は，一つの山を選んで，その山からすべての山の大きさの公約数だけの石を取り除くことです．このゲームでは，$\gcd(0, a) = a$ とします．たとえば，次のようにゲームは進みます．

$$(2, 6) \to (2, 4) \to (2, 3) \to (1, 3) \to (0, 3) \to (0, 0)$$

   二つの山のゲームに対する $\mathcal{P}$ 局面を求めてください．（ヒント：2 進数）

解答

局面 (a, b) は，a および b を 2 進展開して末尾に 0 が同じ数だけ並ぶとき，そしてそのときにかぎり，$\mathcal{P}$ 局面となります．言い換えると，ある $n \geq 0$ および奇数 a', b' に対して，$a = a' \cdot 2^n$ および $b = b' \cdot 2^n$ が成り立つということです．

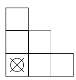
これを示すために，a の 2 進展開の末尾に n_a 個の 0 が並び，b の 2 進展開の末尾に n_b 個の 0 が並ぶとします．$n_a > n_b$ ならば，a の山から 2^{n_b} 個の石を取ると，$\mathcal{P}$ 局面となります．一方，$n_a = n_b$ ならば，a の山から 2^{n_a} の倍数でない石を取ると，この手は末尾に並ぶ 0 の個数を減らし，帰納法により負けることがわかります．a の山から 2^{n_a} の倍数の石を取ったとすると，それは 2^{n_a} の奇数倍のはずです．（なぜなら a は 2^{n_a+1} で割り切れないからです．）この手は末尾に並ぶ 0 の個数は増やし，帰納法により負けとなります．b に対しても，これと同じことが示せます．

10. 非不偏版エンドニム (PARTIZAN ENDNIM) において，偶数長（山が偶数個）の $\mathcal{N}$ 局面は存在しないことを証明してください．

解答

$a\mathbf{w}b$ が $\mathcal{N}$ 局面ならば，定理 2.23 によって $1\mathbf{w}1$ もまた $\mathcal{N}$ 局面となります．しかし，この局面では最初の 2 手は決まっているので，$\mathbf{w}$ も $\mathcal{N}$ 局面でなければなりません．しかし，帰納法によりこれは起こりえません．なぜなら，山が一つもない局面は $\mathcal{P}$ 局面となるからです．

11. 二次元チョンプ (CHOMP) の $\mathcal{P}$ 局面を見つけてください．とくに，幅 1 または 2 のすべての $\mathcal{P}$ 局面を見つけてください．また，次の 6 個のマスを含む盤での $\mathcal{P}$ 局面を少なくとも二つ見つけてください．



解答

幅 1 の盤では，1 個のマスしかない盤を除いてすべての盤が $\mathcal{N}$ 局面となります．なぜなら，先手番の対局者は，取ると負けになるマスを除いた残りす

べてのマスを取ることができるからです．

幅 2 の盤では，二つの列の高さの差がちょうど 1 のとき，そしてそのときにかぎり，$\mathcal{P}$ 局面となります．このような局面からは，どのような手を打っても，二つの列の高さの差が変化します．それ以外の局面からは，この $\mathcal{P}$ 局面にする手があることが容易にわかるでしょう．二つの列の高さが同じであれば，右上隅のマスだけを取ります．二つの列の高さの差が 1 より大きければ，左側の列の高さが右側の列の高さより 1 だけ大きくなるような手を打てばよいのです．

次の局面は $\mathcal{P}$ 局面です．先手番の対局者があるマスへの手を打ったときには，そのマスと同じ名前をつけたもう一つのマスを取る手で応手して勝つことができます．（右下のマスを取る手に対しては，2 通りの応手があります．）

C	B		
A	D		
$\otimes$	A	B	C/D

E	B			
A	C	D		
$\otimes$	A	B	C	C/D

12. 少し複雑ですが，次の一連の考察によって，より直感的なやり方で**非不偏版エンドニム**の三重点を導き出すことができます．（実際には，こうして三重点を見つけました．）2.3 節で証明した定理は使わずに，次の問いに答えてください．

練習問題 2.18 と同じように，$a \geq 1$ に対して，局面 $a\mathbf{w}$ の帰結類がどうなるかを考えます．（これを $\mathbf{w}$ の**左状態図**(*left phase diagram*) と見なします．）

(a) $\mathbf{w}$ が与えられたとき，ある a に対して $a\mathbf{w} \in \mathcal{L}$ が成り立つことを証明してください．

(b) $\mathbf{w}$ の左状態図は次のどれかになることを証明してください．

- $\mathcal{N}$ の 0 個以上の並びにつづいて $\mathcal{L}$ が並びつづける．
- $\mathcal{R}$ の 0 個以上の並びにつづいて一つの $\mathcal{P}$，そしてそのあとに $\mathcal{L}$ が並びつづける．

（同様にして, 右状態図も，$\mathcal{N}$ の 0 個以上の並びにつづいて $\mathcal{R}$ が並びつづけるか，または $\mathcal{L}$ の 0 個以上の並びに引きつづいて一つの $\mathcal{P}$，そしてそのあとに $\mathcal{R}$ が並びつづけることを証明してください．）

(c) $a, b \geq 0$ に対して，$a\mathbf{w}b \in \mathcal{P}$ ならば，$(a+1)\mathbf{w}(b+1) \in \mathcal{P}$ となること

を証明してください．

(d) ここまでに示したことを使って，図 2.1 が正しいことを示してください．（三重点が $(L(x), R(x))$ と一致することを示す必要はありません．）具体的には，左下の方形部分（空のこともあります）が $\mathcal{N}$，その方形から対角線方向に伸びる半直線が $\mathcal{P}$，そして残りの局面は $\mathcal{L}$ および $\mathcal{R}$ となることを示してください．

解答

(a) a を $\mathbf{w}$ のすべての山の大きさの和より大きくなるように選びます．右が局面を一つの山にするまで，左は a の山から 1 個ずつ取りつづけ，最後に山の残りを全部取ることで勝つことができます．

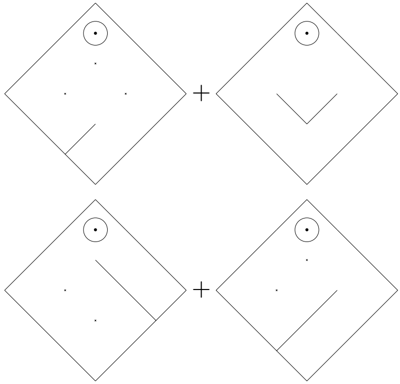
(b) 左端の山の大きさを大きくすることは左にのみ有利となるので，その帰結類は左にとって単調によくなります．これらの局面のどれかが $\mathcal{R}$ 局面であれば，$a\mathbf{w}$ において左が後手番で勝ちとなる最小の a の局面は $\mathcal{P}$ となるはずです．なぜなら，その局面から左が手を打った結果は，$\mathcal{R}$ 局面かまたは（左端の山をすべて取った場合）$\mathcal{R}$ 局面の左選択肢となるからです．

(c) 先手番の対局者が山の大きさを 1 だけ減らしたとすると，後手番の対局者は同じようにできます．一方，先手番の対局者（右）が 2 個以上取って $(a+1)\mathbf{w}b'$ としたら，左は局面 $a\mathbf{w}b'$ への応手と同じ手で勝つことができます．

(d) (a) より，状態図の最初の行は，最小の $\mathcal{P}$ または $\mathcal{L}$ 局面となります．(b) を右状態図に使うと，この行の最小の $\mathcal{P}$ 局面が見つかります．この点を (a, b) と呼びます．(c) を繰り返し使うと，$\mathcal{P}$ 局面が対角線上に並びます．そして (b) より，この対角線の上および左の部分は $\mathcal{R}$ 局面となり，この対角線の下および右の部分は $\mathcal{L}$ 局面となります．(a, b) より左下の点 (a', b') は $\mathcal{R}$ 局面にも $\mathcal{P}$ 局面にもなりません．そうでなければ，(b) より $(a', 1)$ は $\mathcal{R}$ 局面となるからです．同様に，(a', b') は $\mathcal{L}$ 局面にもなりません．つまり，(a', b') は $\mathcal{N}$ 局面です．

第 3 章

1. 次のメイズ (MAIZE) の局面の直和は，それぞれどちらが勝つでしょうか．

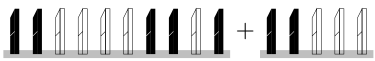


解答

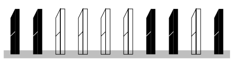
最初の局面の対は，$\mathcal{L}$ 局面と $\mathcal{P}$ 局面の直和なので，左が勝ちます．（左が先手番ならば，左の直和成分に手を打ち，その後は相手が手を打った局面に応手します．左が後手番ならば，相手が手を打った局面に応手します．）

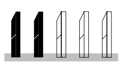
2 番目の局面の対は，$\mathcal{R}$ 局面と $\mathcal{L}$ 局面の直和なので，どちらが勝つかはもう少し詳しく調べる必要があります．どちらの対局者が先手番でも，左の直和成分に第 1 手を打ち，その後は相手が手を打った局面に応手することで勝つことができます．（右が先手番ならば，右の直和成分に打つ手がなくなったあとで，左の直和成分に最後の手を打つことになります．）

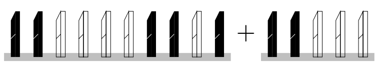
2. 次のドミノ倒し (TOPPLING DOMINOES) の局面の直和は，どの帰結類に属するでしょうか．



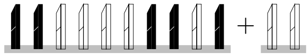
解答

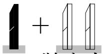
 $\in \mathcal{L}$

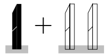
 $\in \mathcal{N}$

 $\in \mathcal{N}$

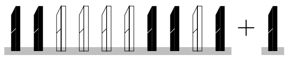
最初の二つの主張は，簡単に確かめることができます．それらの直和に対しては，右が先手番ならば



とし，左が  とするか，または右が最初の直和成分に残っている最も右側のドミノ牌を左に倒すと，

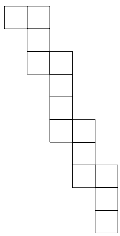


またはもう少し右にとってよい局面が残り，右が優位となります．左が先手番ならば，



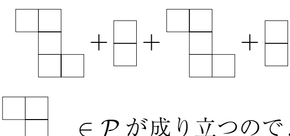
とすれば， 次の手番で最初の直和成分をすべて取り去ることができます．

3. 次のドミナリングの局面において，左は先手番でも後手番でも勝つことを示してください．



解答

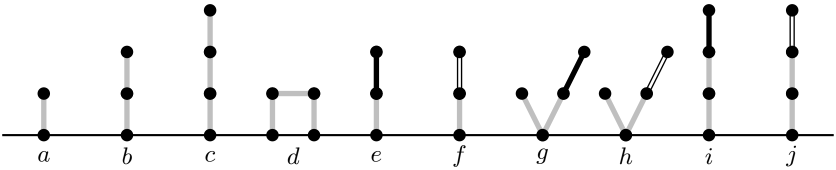
盤を次のように水平に分割して，左の手に制約を課します．



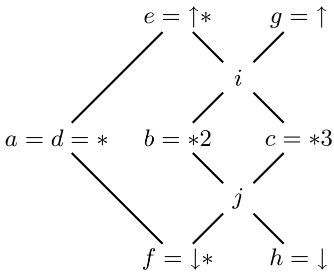
すると， $\in \mathcal{L}$ および $\in \mathcal{P}$ が成り立つので，問題の局面は $\mathcal{L}$ 局面となります．

第 4 章

1. 次のハッケンブッシュの局面の間の半順序関係を図示してください．



解答



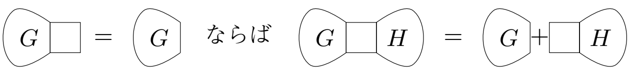
2. （非不偏版）ハッケンブッシュの局面 G に対して，その局面に含まれる一つの辺 e の色を取り替えてみます．この辺 e を青色，緑色および赤色に変えた局面，ならびにその辺 e を取り除いた局面の四つの相異なる局面が得られます．（e を取り除くことで地面から切り離されてしまう辺があるならば，それらの辺も取り除かれることに注意してください．）これらの四つのゲームの間の半順序を調べて，その半順序が局面の構成に依存しないことを証明してください．いつものことですが，「$\cdots$ となると，次は右が $\cdots$」というような論法ではなく，帰納法を使って証明してください．

解答

問題の四つのゲームをそれぞれ G_+，G_*，G_- および G_0 とします．これらに対して，$G_+ > G_* > G_-$，$G_+ > G_0 > G_-$ および $G_* \parallel G_0$ が成り立つことを示します．対称性を考慮すると，$G_+ > G_*$，$G_+ > G_0$ および $G_* \parallel G_0$ を示せば十分です．

- $G_+ - G_* > 0$：左が先手番で $-G_*$ から緑色の辺 e を取り除くと，帰納法によって $G_+ - G_0 > 0$ が成り立ちます．右が $-G_*$ から e を取り除くと，やはり帰納法によって右は負けとなります．これ以外の右の手に対しては，左はもう一方の直和成分に同じ手を打って $G'_+ - G'_*$ とします．この手が e も取り除くのであれば，二つの直和成分は等しくなってその差は 0 となります．この手が e を取り除かないのであれば，帰納法より，$G'_+ - G'_* > 0$ となります．このどちらの場合も左の勝ちとなります．
- $G_+ - G_0 > 0$：左が先手番で b から青色の辺 e を取り除くと，残りは $G_0 - G_0 = 0$ となります．右が先手番の手については，前項と同じとなります．
- $G_* - G_0 \parallel 0$：どちらの対局者も g から緑色の辺を取り除き，残りを $G_0 - G_0 = 0$ として勝つことができます．

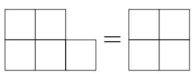
3. 次のドミナリング分解定理は，*ONAG* [Con01] および *WW* [BCG01] で示されたものです．



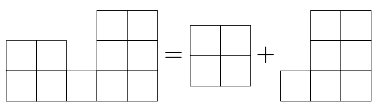
が成り立つ．

ここで G および H はドミナリングの任意の局面とします．

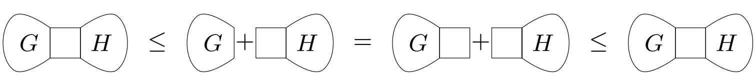
この定理は，たとえば次のように使うことができます．次の二つの局面が等しいことを確かめるのはそれほどむずかしくありません．



すると，定理から次の式が成り立ちます．



ONAG [Con01] にあるコンウェイの証明の概略は次の図のとおりです．

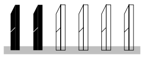


この式に現れるそれぞれの不等式および等式が成り立つことを示して，ドミナリング分解定理の証明を完成させてください．

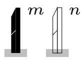
解答

　左側の不等号は，**片手枷原理**（74 ページ）を用いて示すことができます．具体的には，右辺で分離されている辺をまたぐ手を打たないという制約を右に課しても，左はその制約がない場合に比べて不利になることはありません．中央の等号は，定理の仮定から得られます．右側の不等号は，**片手枷原理**をもっと巧妙に使う必要があります．右に左辺の二つの箱の高々一つだけにしか手を打てないという制約を課しても，左はその制約がない場合に比べて不利になることはなく，その制約によって右辺の局面と同じになります．

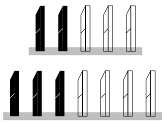
4. (a) 次の**ドミノ倒し**の局面の左誘因は右誘因に等しいことを証明してください．



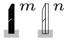
(b) $m, n \geq 1$ に対して，次の形の二つのゲームの誘因を比較した結果を述べ，それを証明してください．



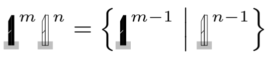
この結果を使うと，たとえば次の二つのゲームの誘因を比較することができます．



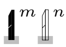
解答



において，どちらの対局者にとっても優位な手は一度に相手のドミノ牌をすべて倒す手なので，



となります．ここで，



の誘因は，$m + n$ に関して単調，つまり $m + n \geq m' + n'$ が成り立つとき，

そしてそのときにかぎり，

$$\blacksquare^{m}\square^{n}$$

の左誘因は

$$\blacksquare^{m'}\square^{n'}$$

の左誘因より等しいかまたは大きくなることを示します．（$\blacksquare^{m}\square^{n} = -\blacksquare^{n}\square^{m}$ より，右誘因は左誘因に等しいことがすぐにわかります．）

　これを示すには，二つの左誘因の差

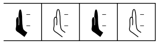
$$\left(\blacksquare^{m-1} - \blacksquare^{m}\square^{n}\right) - \left(\blacksquare^{m'-1} - \blacksquare^{m'}\square^{n'}\right)$$

を考え，$m+n \geq m'+n'$ ならば左は後手番で勝つことを確かめます．優位な手によって相手のドミノ牌を倒すので，右の手につづいて左が手を打った結果は次のどちらかとなります．

$$\left(\blacksquare^{m-1} - \blacksquare^{m-1}\right) - \left(\blacksquare^{m'-1} - \blacksquare^{m'-1}\right)$$
$$\left(\blacksquare^{m-1} - \square^{n-1}\right) - \left(\blacksquare^{m'-1} - \square^{n'-1}\right)$$

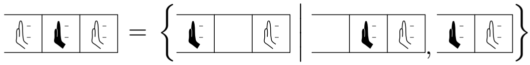
前者はつねに 0 となり，後者は $m+n \geq m'+n'$ のときに限り ≥ 0 となります．

第 5 章

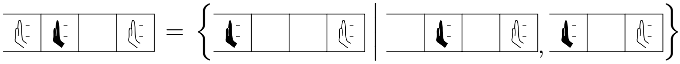
1. プッシュの局面  の値を求めてください．

解答

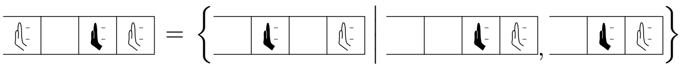
まず，次のことがわかります．



$$= \left\{-2 \,\middle|\, -\frac{7}{4}, -\frac{3}{2}\right\} = -\frac{15}{8}$$

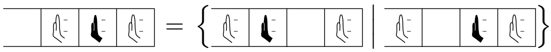


$$= \{-3 \mid -2, -2\} = -\frac{5}{2}$$

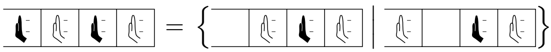


$$= \left\{-2 \,\middle|\, -\frac{15}{8}, -\frac{7}{4}\right\} = -\frac{31}{16}$$

次に劣位な選択肢を除くと，次の局面の値がわかります．



$$= \left\{-\frac{5}{2} \,\middle|\, -\frac{31}{16}\right\} = -2$$



$$= \left\{-2 \,\middle|\, -\frac{31}{16}\right\} = -\frac{63}{32}$$

2. n 個の石からなる山に対して，$n = 3k$ ならば，左および右はどちらも山から 1 個または 2 個の石を取ることができます．$n = 3k+1$ ならば，左は山から 1 個または 2 個の石を取ることができます．$n = 3k+2$ ならば，右は山から 1 個または 2 個の石を取ることができます．このとき，すべての n について，このゲームの値を求めてください．

解答

$n = 0, 1, \ldots, 6$ の値はそれぞれ，0，1，-1，± 1，0，-1 および $\{0 \mid -1\}$ となります．

主張：$m > 1$ に対して，$3m+1$ 個の石からなる山の値は 0，$3m+2$ 個の石からなる山の値は -1，そして $3m+3$ 個の石からなる山の値は $\{0 \mid -1\}$ となる．

これを m に関する帰納法を用いて証明します．

$3m+1 = \{-1, \{0 \mid -1\} \mid \ \} = 0$ となり，$\{0 \mid -1\}$ は打消し可能な選択肢です．

$3m+2 = \{\ \mid 0, \{0 \mid -1\}\} = -1$ となり，$\{0 \mid -1\}$ は打消し可能な選択肢です．

そして，$3m+3 = \{0 \mid -1\}$ となります．

3. n 個の石からなる山に対して，n が偶数ならば，左は山から 2 個の石を取ることができ，右は山から 1 個の石を取ることができます．n が奇数ならば，左は山から 1 個の石を取ることができ，右は山から 2 個の石を取ることができます．このとき，すべての n について，このゲームの値を求めてください．

解答

このゲームの値は，石の個数が小さいほうから順に $\{\ \mid\ \} = 0$，$\{0 \mid\ \} = 1$，$\{0 \mid 1\} = \frac{1}{2}$，$\left\{0 \mid \frac{1}{2}\right\} = \frac{3}{4}$，$\left\{\frac{1}{2} \mid \frac{3}{4}\right\} = \frac{5}{8}$ となり，「次」の値は「直前」の二つの値の中間にあります．

主張：$m > 1$ に対して，$2m$ 個の石からなる山の値は $\frac{1}{4^m}(\frac{2}{3}(4^m - 1))$，$2m+1$ 個の石からなる山の値は $\frac{1}{4^m}(\frac{2}{3}(4^m - 1) + 1)$ となる．

この主張を，帰納法を用いて定義 5.12 から証明します．

$2m+2$ 個の石からなる山の値は次のとおりです．

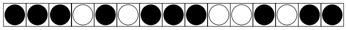
$$\begin{aligned}\left\{\frac{1}{4^m}\left(\frac{2}{3}(4^m - 1)\right) \middle| \frac{1}{4^m}\left(\frac{2}{3}(4^m - 1) + 1\right)\right\} &= \frac{1}{4^{m+1}}\left(2\left(\frac{2}{3}(4^m - 1)\right) + 1\right) \\ &= \frac{1}{4^{m+1}}\left(\frac{1}{3}(4^{m+1} - 1)\right)\end{aligned}$$

$2m+3$ 個の石からなる山の値は次のとおりです．

$$\left\{\frac{1}{4^{m+1}}\left(\frac{2}{3}(4^{m+1} - 1)\right) \middle| \frac{1}{4^{m+1}}\left(\frac{2}{3}(4^{m+1} - 4) + 4\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{4^{m+1}}\left(\frac{2}{3}(4^{m+1}-1)+1\right)$$

4. **赤と青のサクランボ** (RED-BLUE CHERRIES) の局面の値をすばやく計算する方法を見つけてください．その計算方法が正しいことを証明する必要はありません．この計算方法を使って，次の局面の値を数秒で計算することができるでしょうか．



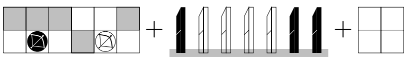
解答

サクランボが 1 色だけ（たとえば青）ならば，その局面の値は明らかにそのサクランボの個数に等しくなります．そうでないとすると，どちらかの端から最初に色の変わる地点があります．左端から n 個の青サクランボが並び，それに赤サクランボがつづくとします．これが局面の値に n または $n-1$ だけ寄与します．このどちらであるかは，次に同じ色が連続するサクランボを見つけます．（そのようなサクランボがなければ最後のサクランボの色を調べます．）この色が青ならば n，赤ならば $n-1$ が寄与する値です．

両方の端が寄与する値を合計すると，その**サクランボ**の局面の値が求められます．

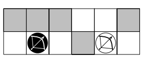
問題の局面では，左端は局面の値に 3 だけ寄与し，右端は $2-1=1$ だけ寄与するので，この局面の値はこれらを合計して 4 となります．

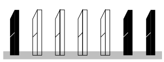
5. 次の**アマゾン**，**ドミノ倒し**および**ドミナリング**の局面の和はどちらが勝つでしょうか．

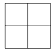


解答

それぞれの局面の値は

 $= \{0, \pm 1 \mid -2\}$

 $= \{1 \mid \{0 \mid -2\}\}$

 $= \pm 1$

となるので，これらの直和の値は $\{0 \mid \{-1, \{0 \mid -2\} \mid -3\}\}$ となり，これは 0 と比較不能です．左の打つことのできる手のうち，**アマゾン**の局面を 0 とする手を除けば，残りはすべて正のゲームとなる手です．右の打つことのできる手は，すべて負のゲームとなる手です．

6. $g(l, r)$ をそれぞれの大きさが l および r の山で対局する**侵食** (EROSION) の値とします．帰納法を用いて

$$g(l,r) = \begin{cases} \left\lceil \dfrac{l}{r} - \phi \right\rceil & (l \geq r \text{ のとき}) \\ -\left\lceil \dfrac{r}{l} - \phi \right\rceil & (l \leq r \text{ のとき}) \end{cases}$$

を証明してください．ただし $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ は黄金比とし，$\phi = \frac{1}{\phi - 1}$ が成り立ちます．

解答

$g(l, r)$ は，$l \geq r$ のときは非負で，$l \leq r$ のときは非正となることに注意してください．

$l \geq r$ のとき，左が手を打つと $(l - r, r)$ となります．$l \geq 2r$ ならば，帰納法によりこの選択肢の値は $g(l-r, r) = \left\lceil \frac{l-r}{r} - \phi \right\rceil = \left\lceil \frac{l}{r} - \phi \right\rceil - 1 \geq 0$ となるので，

$$g(l,r) = \{g(l-r,r) \mid \} = \left\{ \left\lceil \frac{l}{r} - \phi \right\rceil - 1 \,\middle|\, \right\} = \left\lceil \frac{l}{r} - \phi \right\rceil$$

となります．

一方，$r < l \leq 2r$ ならば，帰納法により $g(l-r, r) = -\left\lceil \frac{r}{l} - \phi \right\rceil$ となります．最後に

$$\left\lceil \frac{l}{r} - \phi \right\rceil = \begin{cases} 1 & (g(l-r,r) = 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (g(l-r,r) < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

が成り立つことを示します．$\left\lceil \frac{l}{r} - \phi \right\rceil = 1 \Leftrightarrow g(l-r, r) = 0$ が成り立つことは，次の式変形によって確かめることができます．

$$\begin{aligned} \left\lceil \frac{l}{r} - \phi \right\rceil = 1 &\Leftrightarrow 0 < \frac{l}{r} - \phi < 1 \\ &\Leftrightarrow \phi < \frac{l}{r} < 1 + \phi \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \phi - 1 < \frac{l-r}{r} < \phi \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{\phi - 1} > \frac{r}{l-r} > \frac{1}{\phi} \\
&\Leftrightarrow \phi > \frac{r}{l-r} > \phi - 1 \\
&\Leftrightarrow 0 > \frac{r}{l-r} - \phi > -1 \\
&\Leftrightarrow \left\lceil \frac{r}{l-r} - \phi \right\rceil = 0
\end{aligned}
$$

（ϕ は無理数なので，両辺が等しくなることはありません．）

同様にして，この式変形の左側の不等号の向きを変え，右側の不等号を無視すると，$\left\lceil \frac{l}{r} - \phi \right\rceil = 0 \Leftrightarrow g(l-r, r) < 0$ を示すことができます．

7. 定義 5.12 で与えられる数 x は，標準形となることを確かめてください．

解答

左選択肢も右選択肢も打消し可能でないことを示せば十分です．x^{RL} は 0 または $x + \frac{1}{2^j} - \frac{1}{2^i}$ の形（ただし $i < j$）となることに注意すると，後者の場合は $x^{RL} < x$ となり，どちらの場合も x^R は打消し可能な選択肢とはなりません．同様に，x^{LR} は 0 とはなりえないので後者の場合だけしかなく，x^L は打消し可能とはなりません．

8. 補題 5.25（115 ページ）を証明してください．

解答

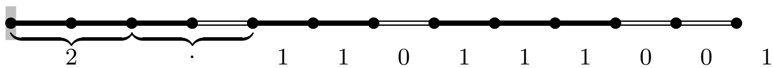
$x_1 < 0 < x_2$ ならば，それらの間に 0 があります．0 は 0 日目に生まれた唯一のゲームです．一方 $0 < x_1 < x_2$ ならば，帰納法により，$0 < \frac{k}{2^j} \leq 1$ となる奇数 k に対して $n + \frac{k}{2^j}$ の誕生日は $n + j$ となることに注意して，$x_1 = n_1 + \frac{k_1}{2^{j_1}}$ および $x_2 = n_2 + \frac{k_2}{2^{j_2}}$ と書くことができます．すると，$n_1 \leq n_2$ より $j_1 \geq j_2$ が成り立ち，x_1 の右選択肢 $x_1^R = n_1 + \frac{k_1}{2^{j_1}} + \frac{1}{2^{j_1}} < x_2$ は，x_1 および x_2 より早く生まれています．

9. 第 4 章の章末問題 2（103 ページ）で証明した結果を使って，LR-ハッケンブッシュの値は必ず数になることを示してください．

解答

G をこのようなハッケンブッシュの局面とします．章末問題 2（103 ページ）より，G のすべての誘因は負となることから，すべての左選択肢はすべての右選択肢より小さくなります．帰納法により，すべての選択肢は数となり，定理 5.21 の前提を満たします．

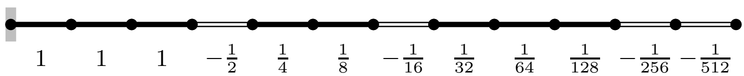
10. バーレカンプ (Elwyn Berlekamp) は，枝別れのない LR-ハッケンブッシュの値を計算する簡単な規則を見つけました．地面につながっている辺は黒色とします．すべての辺が黒ならば，あきらかにその局面の値はその辺の本数に等しくなります．そうでなければ，最初に辺の色が黒から白に変わるところを見つけます．色の変わり目となる二つの辺を小数点で置き換えて，それより前にある黒の辺はそれぞれ 1 だけ値に寄与します．また，それより後の黒および白の辺をそれぞれ 1 および 0 で置き換えます．そして最後に 1 を追加します．こうして得られた 2 進小数が，この局面の値となります．たとえば，



$$= 2 + .110111001 = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{512} = 2\frac{441}{512}$$

となります．

ヴァンルード (Thea van Roode) は，枝別れのない LR-ハッケンブッシュの値を計算する別の方法を見つけました．最初の色の変わり目までは，それぞれの辺に 1 を割り当てます．そのあとの辺は，順に 2 で割った値を割り当てます．その値の符号は，その辺の色によって決まります．たとえば，



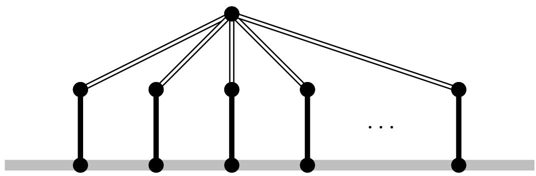
$$= 1 + 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} - \frac{1}{256} - \frac{1}{512} = 2\frac{441}{512}$$

となります．これらの計算方法が正しく局面の値を計算していることを証明してください．

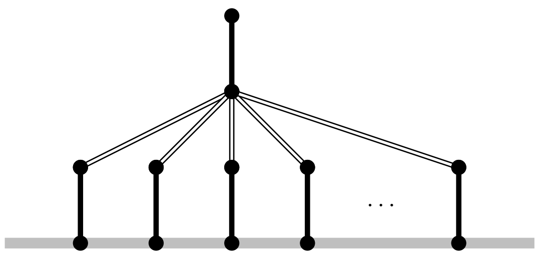
解答

第 4 章の章末問題 2（103 ページ）の結果（または帰納法）を用いると，それぞれの対局者にとっての最善手は地面からできるだけ離れた辺を切ることです．右選択肢および左選択肢がそれぞれこの計算方法で得られる数の標準形となることを帰納的に確かめてください．具体的には，右の手は末尾の 01^n を 1 で置き換え，左の手は末尾の 10^n1 を 1 で置き換えます．どちらの計算方法でも，誘因は $-\frac{1}{2^j}$ となります．ただし，j は置き換えたあとの 1 の位置とします．

11. (a) 次のハッケンブッシュの局面において，地面に接している辺の本数を n として，この局面の値 f_n を n の関数とみなします．n が小さい値のときの f_n を求めてください．f_n をどこまで求めることができるでしょうか．



(b) 次の局面の場合はどうでしょうか．



(c) 自分自身で，無限の系列となるハッケンブッシュの局面を見つけてください．そして，その最初のいくつかの値を求めることができるでしょうか．

解答

(a) この局面の値は $0, \frac{1}{2}, 1, 1, 1, 1, \ldots$ となります．これを証明する最も簡単な方法は，差分ゲームの対局をすることです．G_n を n 本の辺が地面に接している局面とします．先手番の対局者が $G_n - 1$ の n 本の辺のどれ

かを切ったならば，後手番の対局者は同じ「足」に含まれる辺を切ることで応手すると，帰納法により $G_{n-1} - 1 = 1 - 1 = 0$ となり，後手番の対局者の勝ちとなります．帰納法が成り立たない例外扱いする場合として，G_0，G_1 および G_2 の値は個別に計算します．

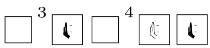
(b) この局面の値は $0, \frac{3}{4}, 1\frac{1}{2}, 2, 2, 2, \ldots$ となります．証明は，(a) のときとほとんど同じです．

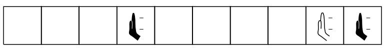
12. 任意の全微小ゲームは無限小ゲームとなること，つまり，G が全微小ゲームならば任意の正数 x に対して $-x < G < x$ が成り立つことを証明してください．

解答

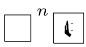
$x - G$ において，左が先手番でも後手番でも勝つことを確かめます．**弱数避定理**によって，どちらの対局者も G が 0 となるまでは，x には手を打たないとしてかまいません．すると，$x > 0$ より左の勝ちとなります．

弱数避定理を用いた別の証明は次のとおりです．右が x に対して手を打つと，その結果は $G' + x^R > x$ の形になります．ここで $x^R > x$ となるので，帰納法によりこれは右の負けとなります．

13. この問題では，連続する空きマスを指数表記することで，プッシュの局面を略記します．たとえば， は次の局面を表します．

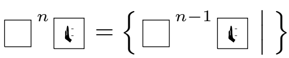


このとき，次の各項を証明してください．

(a)  の値は $n + 1$ となる．
(b)  の値は $2 - \frac{1}{2^{n+1}}$ となる．
(c) $(m > 0)$ の値は $m + 1$ となる．

解答

(a) は単独で，(b) および (c) は二つを合わせて，それぞれ帰納法を使って証明します．

(a)  $= \{n \mid \} = n + 1$ が成り立ちます．帰納法

の仮定が成り立たない $n=0$ の場合の局面の値は 1 となります．

(b)

$$
\begin{aligned}
\square^{n}\boxed{\circ}\boxed{\bullet} &= \left\{\square^{n-1}\boxed{\circ}\boxed{\bullet} \,\middle|\, \square^{n-1}\boxed{\circ}\square\boxed{\bullet}\right\} \\
&= \left\{2-\frac{1}{2^{n}} \,\middle|\, 2\right\} \\
&= 2-\frac{1}{2^{n+1}}
\end{aligned}
$$

が成り立ちます．帰納法の仮定が成り立たない $n=0$ の場合は，$\boxed{\circ}\boxed{\bullet} = \left\{\boxed{\bullet} \,\middle|\, \square\boxed{\bullet}\right\} = \{1 \mid 2\} = 1\frac{1}{2} = 2-\frac{1}{2^1}$ となります．

(c)

$$
\begin{aligned}
\square^{n}\boxed{\circ}\square^{m}\boxed{\bullet} &= \left\{\square^{n}\boxed{\circ}\square^{m-1}\boxed{\bullet} \,\middle|\, \square^{n-1}\boxed{\circ}\square^{m+1}\boxed{\bullet}\right\} \\
&= \begin{cases} \{m \mid m+2\} = m+1 & (m>1\text{ のとき}) \\ \left\{2-\dfrac{1}{2^{n+1}} \,\middle|\, 3\right\} = 2 = m+1 & (m=1\text{ のとき}) \end{cases}
\end{aligned}
$$

帰納法の仮定が成り立たない $n=0$ の場合は

$$
\begin{aligned}
\boxed{\circ}\square^{m}\boxed{\bullet} &= \left\{\boxed{\circ}\square^{m-1}\boxed{\bullet} \,\middle|\, \square^{m+1}\boxed{\bullet}\right\} \\
&= \begin{cases} \{m \mid m+2\} = m+1 & (m>1\text{ のとき}) \\ \left\{1\dfrac{1}{2} \,\middle|\, 3\right\} = 2 = m+1 & (m=1\text{ のとき}) \end{cases}
\end{aligned}
$$

となります．

14. 定理 5.29（117 ページ）を証明してください．

解答

証明は，右の $x-G^L$ とする手に対して，$\mathcal{G}^L \lhd\!| \; x$ が成り立つことによって左の勝ちとなることを除いて，定理 5.21 の証明と同じです．右の $x-G^L$ とする手に対しては，$x^R \lhd\!| \; \mathcal{G}^R$ とはなりえません．なぜなら，$x^R \lhd\!| \; \mathcal{G}^R$ が成り立つならば，x より簡単な x^R に対して $\mathcal{G}^L \lhd\!| \; x^R \lhd\!| \; \mathcal{G}^R$ となるからです．定理 5.21 の証明のそのほかの部分はそのまま使えます．

15. G が右選択肢をもたない（または左選択肢をもたない）ならば，G は整数となることを証明してください．

解答

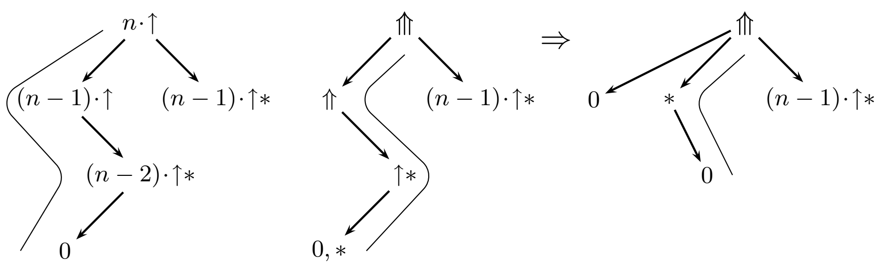
　これは，定理 5.29（117 ページ）からの直接の帰結です．具体的には，この定理によって，G が右選択肢をもたないならば，G は $x \mathrel{|\!\!\triangleright} \mathcal{G}^L$ を満たす最も簡単な数となります．さらに x は整数でなければなりません．なぜなら，整数でない x については，$\lceil x \rceil$ は x の標準形に含まれるので，$\lceil x \rceil$ は x より簡単な数となるからです．

16. $n{\cdot}\uparrow$ および $n{\cdot}\uparrow*$ の標準形を与える定理 5.43 を証明してください．打消し可能な選択肢および劣位な選択肢を見つけるために，この定理の直前の説明と同様の図を描いてください．

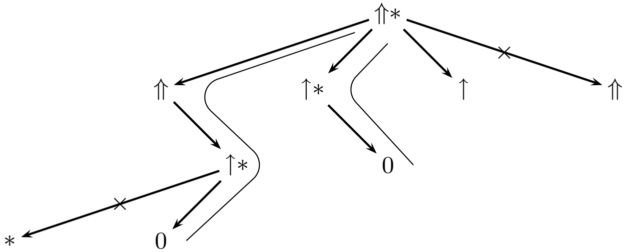
解答

　$n = 1$ のときは，本文で述べています．

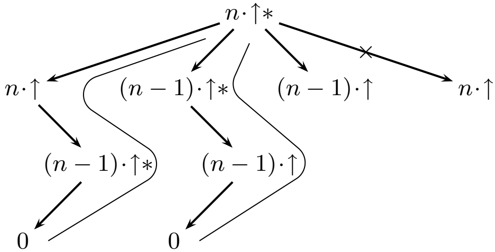
　$n = 2$ または $n \geq 4$ のときは，左の $n{\cdot}\uparrow$ を $(n-1){\cdot}\uparrow$ とする手は $(n-2){\cdot}\uparrow*$ で打ち消されて 0 となります．（帰納法により，$(n-2){\cdot}\uparrow*$ の標準形の左選択肢は 0 となります．）$n = 3$ のときは，同じく左の $n{\cdot}\uparrow$ を $(n-1){\cdot}\uparrow$ とする手は，$\uparrow*$ で打ち消されて 0 および $*$ となります．しかし，この $*$ とする手は打ち消しきられます．



$n = 2$ のときは，左の $\Uparrow*$ を $\Uparrow$ とする手は，$\uparrow*$ で打ち消されて 0 および $*$ となります．この $*$ とする手は，左の $\uparrow*$ とする手よりも劣位となります．しかし，左の $\uparrow*$ とする手は，0 で打ち消しきられます．右の $\uparrow$ とする手は，$\Uparrow$ とする手よりも優位となります．



$n \geq 3$ のときは，左の $n{\cdot}\uparrow$ とする手および $(n-1){\cdot}\uparrow *$ とする手は，それぞれ打ち消されて 0 となります．一方，右の $(n-1){\cdot}\uparrow$ とする手は優位な手となります．



17. $g(a,b,c)$ を，a 個の空きマスにつづいて 1 個の黒駒，それから b 個の空きマス，1 個の白駒，そして c 個の空きマスが並ぶ 1 次元の**アマゾン**の局面とします．たとえば

$g(5,2,3) =$ 

となります．このとき，$g(a,b,c)$ の値を求めてください．

解答

どちらの対局者も，相手の駒の隣に移動して相手の駒と反対側のマスに矢を射る（あるいは，これと同等のことですが，相手の駒から 1 マス離れたマスに移動して相手の駒との間のマスに矢を射る）でしょう．$b=0$ のときは，$g(a,b,c)$ の値は $a-c$ となります．これより

$$g(a,b,c) = \begin{cases} a-c & (b=0 \text{ のとき}) \\ a-c \pm (b-1) & (b \neq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となりますが，$\pm(-1)=0$ が成り立つので場合分けは不要となり，$g(a,b,c)$ の値は $a-c\pm(b-1)$ となります．

18. アマゾンの局面 $g(a,b,c,d)$ を，前問の $g(a,b,c)$ につづけてさらに 1 個の黒駒と d 個の空きマスを付け加えたものとします．たとえば

$g(5,2,3,1)=$ 

となります．このとき，$g(a,b,c,d)$ の値を求めてください．（$abcd=0$ のときは，どれを特別扱いする必要があるかよく調べてください．）

解答

左は最善手を打てば，両端の $a+d$ 個の空きマスを獲得できますが，中央部の b 個および c 個の空きマスについては競り合うことになります．右は，どちらかの黒駒の隣のマスまで移動して，それとは反対向きに矢を射って $b+c-1$ 個の空きマスを獲得できます．$b\geq c$ ならば，左は右側の黒駒を動かして $b-1$ 個の空きマスを獲得できます．すると相手は $c-1$ 個の空きマスを獲得します．つまり，δ を $b-c$ の絶対値とすると，

$$g(a,b,c,d)=a+d+\Bigl\{b+c-2\mid\delta\Bigm\Vert 1-b-c\Bigr\}$$

が得られます．$b=c=0$ のときは個別に調べると，最後の直和成分がちょうど 0 となるので大丈夫です．$b>c=0$ のときも，この直和成分は $\{b-2\mid b\,\Vert\,1-b\}=\{b-1\mid 1-b\}$ となり，前述の式が成り立ちます．

19. $g+g$ は，$g+g+g$ よりもわかりやすい標準形をもつと予想されますが，この問題ではその反例を調べてみます．具体的には，$x>0$ を数とすると，$+_x+_x+_x$ は $+_G$ と書き換えることができます．ここで，G は x に限りなく近いゲームとなります．

(a) $+_x$ と $\{0\mid -x\}$ を比較してください．
(b) $+_x+_x$ と $\{0\mid -x\}$ を比較してください．
(c) $+_x+_x$ の標準形を求めてください．（右選択肢または左選択肢のどちらかは複数の選択肢となるはずです．）
(d) $+_x+_x+_x$ の標準形を求め，それを $+_G$ の形で書き表してください．

G を自力で求め，どのような計算をしたかを示してください．（計算間違いを

見つけるためにソフトウェアの助けを借りてもかまいません.)

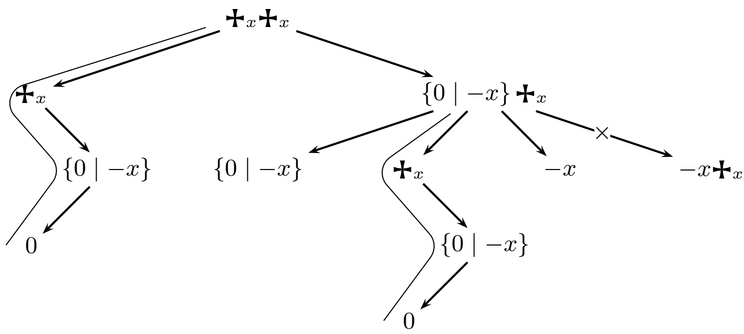
解答

G は G^R より大きくなることはないので，⧾_x は $\{0 \mid -x\}$ と比較不能です．しかし，$\{x \mid 0\}\,\text{⧾}_x\text{⧾}_x$ には右の勝ちとなる手はないので，$\text{⧾}_x\text{⧾}_x > \{0 \mid -x\}$ となります．

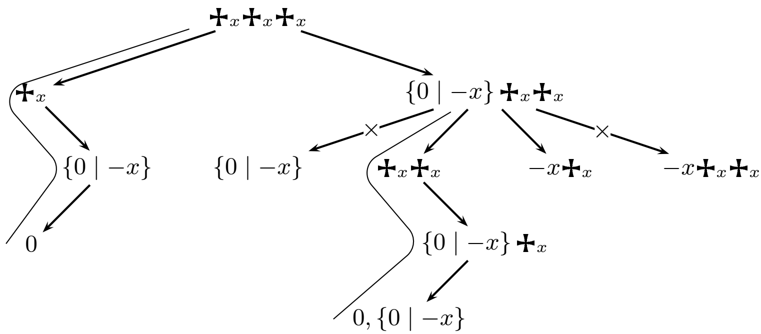
$\text{⧾}_x\text{⧾}_x$ の標準形は

$$\text{⧾}_x\text{⧾}_x = \left\{0 \,\middle\|\, 0, \{0 \mid -x\} \mid -x\right\}$$

となります．



ここで，$\text{⧾}_x\text{⧾}_x$ の標準形における左選択肢は 0 となることから，$\text{⧾}_x\text{⧾}_x\text{⧾}_x = \{0 \,\|\, 0 \mid -x\text{⧿}_x\} = \text{⧾}_G$ が得られます．ただし，$G = x\text{⧾}_x$ とします．



このゲーム木で，$\{0 \mid -x\}\,\text{⧾}_x\text{⧾}_x$ の左選択肢 0 および $\{0 \mid -x\}$ のうち，

$\{0 \mid -x\}$ とする手は $-x$ で打ち消しきられて，0 とする手だけが残ります．

20. コンウェイは，次のように述べています．「興味深いことに，**任意**のゲーム G に対して $⧾_{⧾_{⧾_G}} = \uparrow$ が成り立ち，とくに $\uparrow$ は $G = ⧾_G$ の唯一の解となる．[Con01, 215 ページ]」この主張を証明してください．

解答

まず，$\{0 \mid ⧿_{⧾_G}\} = *$ となることに注意すると，$⧿_{⧾_G} \leq 0$ が成り立つことから，明らかに $\{0 \mid ⧿_{⧾_G}\} \leq \{0 \mid 0\}$ となります．また同様にして，$\{0 \mid ⧿_{⧾_G}\} + *$ において左は後手番で勝ちます．

$$
\begin{tikzcd}
\{0 \mid ⧿_{⧾_G}\} + * \arrow[d] \arrow[dr] & \\
⧿_{⧾_G} + * \arrow[d] & \{0 \mid ⧿_{⧾_G}\} \arrow[d] \\
\{⧾_G \mid 0\} + \{0 \mid 0\} \geq 0 & 0
\end{tikzcd}
$$

$⧾_{⧾_{⧾_G}} = \uparrow$ となることを証明するために，$⧾_{⧾_{⧾_G}} \downarrow$ において後手番の対局者が勝つことを示します．任意のゲーム G に対して $⧾_G > 0$ となる事実を使うと，次の図のすべての分岐において後手番の対局者が勝つことがわかります．

$$
\begin{tikzcd}
 & & ⧾_{⧾_{⧾_G}} + \downarrow \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[drr] & & \\
⧾_{⧾_{⧾_G}} + * \arrow[d] & \downarrow < 0 & & ⧾_{⧾_{⧾_G}} > 0 & \{0 \mid ⧿_{⧾_G}\} + \downarrow \arrow[d] \\
\{0 \mid ⧿_{⧾_G}\} + * = 0 & & & & \{0 \mid ⧿_{⧾_G}\} + * = 0
\end{tikzcd}
$$

$⧾_{⧾_{⧾_G}} = \uparrow$ が成り立つことから，次の各項が導かれます．

(a) $G = ⧾_2$ とすると，$⧾_\uparrow = ⧾_{⧾_{⧾_{⧾_2}}} = \uparrow$ となるので，$⧾_\uparrow = \uparrow$ が成り立ちます．

(b) ほかに $⧾_G = G$ を満たすゲーム G はありません．なぜなら，$⧾_{⧾_{⧾_G}} = G \neq \uparrow$ となるからです．

21. a および c を整数とするとき，$g = \{a \parallel 0 \mid -c\}$ の標準形を求めてください．普通に計算すると，a，0 および c の大小関係によって場合分けをする必要があります．この章で登場した値をもつゲーム（またはゲームの局面）には，そ

の名前を使ってください．

解答

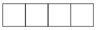
$$
g = \begin{cases}
0 & (a < 0 \text{ のとき}) \\
\uparrow & (a = c = 0 \text{ のとき}) \\
\{a \mid *\} & (a > 0 \text{ かつ } c = 0 \text{ のとき}) \\
\maltese_c & (a = 0 \text{ かつ } c > 0 \text{ のとき}) \\
\{a \parallel 0 \mid -c\} & (a > 0 \text{ かつ } c > 0 \text{ のとき}) \\
\left\{a \,\middle|\, -\frac{1}{2}\right\} & (a > 0 \text{ かつ } c = 1 \text{ のとき}) \\
\{a \mid -1\} & (a > 0 \text{ かつ } c > 1 \text{ のとき})
\end{cases}
$$

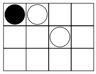
第 6 章

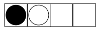
1. 興味深いことに，2 日目までに生まれる 22 個のゲームは，それぞれ 8×8 の盤上で各色 2 個ずつ計 4 個の石で対局する**コナネ** (KONANE) の局面の値として現れます．そのそれぞれの局面（またはその符号の反転）を構成して示してください．

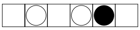
解答

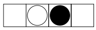
それぞれの局面またはその符号の反転を**コナネ**の 8×8 の盤の左上隅の部分として表記すると，次のとおりです．

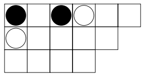

0

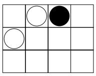

2

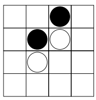

1

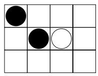

$\uparrow *$

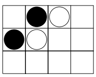

$*$

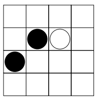

$1*$

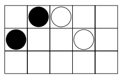

$\{1 \mid 0\}$

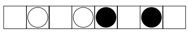

$\{1 \mid 0, *\}$


$\frac{1}{2}$


$\{1 \mid *\}$


$\uparrow$


± 1


$*2$

2. 図 6.1（2 日目までに生まれたゲームの半順序）が正しいことを確かめるためには，何個の $G > H$ および $G \parallel H$ の形の命題を調べる必要があるでしょうか．数えるときには，対称性やそのほかの性質をうまく使ってください．調べる場合の数をどのようにして減らしたかを説明してください．（たとえば，$G > H$ が成り立つならば $-H > -G$ も成り立つので，どちらか一方だけを確かめれば十分です．）

それぞれの命題を証明する必要はありません．そんなことをしていたら，すぐに飽きてしまいます．

解答

上半分には 18 本の線があるので，それらから 18 個の $G > H$ の形の命題が生じます．また図からは，いくつかのゲームの対が比較不能であるという命題も読み取れます．同じ高さに位置するゲームの対は，全部で $\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}=13$ 組あります．また，次の組合せを調べる必要があります．

$$
\begin{array}{cl}
1 & \text{は}\{1 \mid 0,*\}(，\{1 \mid *\}\text{ および }\{1 \mid 0\})\text{ と比較不能} \\
\frac{1}{2} & \text{は}\pm 1(\text{および }\{1 \mid 0,*\})\text{ と比較不能} \\
\{1 \mid *\} & \text{は}*(\text{および }\uparrow *)\text{ と比較不能} \\
\{1 \mid 0\} & \text{は}\uparrow\text{ および }0\text{ と比較不能} \\
\uparrow & \text{は}*\text{ および }\pm 1\text{ と比較不能} \\
\uparrow * & \text{は}0\text{ および }\pm 1\text{ と比較不能} \\
\{1 \mid 0*\} & \text{は}0\text{ および }*\text{ と比較不能}
\end{array}
$$

結局，全部で $18+13+11=42$ 個の命題を調べる必要があります．束論を学んでいれば，分配束は何層かに分かれたハッセ図となることがわかるので，調べなければならない命題の数をさらに減らすことができるでしょう．

3. 定理 6.12（151 ページ）の主張「ゲーム G は，終局値が 0 となるとき，そしてそのときにかぎり無限小ゲームとなる」を証明してください．その際，この定理 6.12 よりあとに証明した定理を使わないでください．

解答

弱数避定理によって，$x-G$ の対局において，G が終局値になるまではすべての手は G に対して打たれるとしてかまいません．このことから，終局値を 0 となるゲームおよび無限小ゲームの同値性を導くことができます．

$\Leftarrow$：$\mathbf{LS}(G)=x>0$ ならば，$x>y>0$ に対して，$G-y$ において左は先手番で勝ちます．

$\Rightarrow$：$\mathbf{LS}(G)=0$ ならば，$x>0$ に対して，$G-x$ において右は後手番で勝ちます．

4. (a) 温いゲームと熱いゲームの和は，熱いゲームとなることを示してください．
   (b) 二つの熱いゲームの和は温いゲームまたは冷たいゲームとなる場合があることを示してください．

解答

(a) G を終局値 x をもつ温いゲームとし，H を終局値 $y > z$ をもつ熱いゲームとします．そこで $G + H$ の左終局値は少なくとも $x + y$ となり，右終局値は高々 $x + z$ となることを示せば，$x + y > x + z$ が成り立つので，$G + H$ は熱いゲームとなります．（実際には，$G + H$ の終局値はこれらの値に一致しますが，これを示す必要はありません．）$G + H$ において，左は先手番で $x + y$ とするために H に（この構成要素で y を獲得しようとして）第 1 手を打ち，その後は相手が手を打った構成要素に応手します．これと対称的な議論によって，右は先手番で $x + z$ とすることができます．

(b) 和 $\pm 1 + \pm 1* = *$ は温いゲームとなります．和 $\pm 1 + \pm 1 = 0$ は冷たいゲームとなります．

5. 次の各項を順を追って示すことで，定理 6.29 を証明してください．証明したいのは，

$$S_1 = H \wedge (G_1 \vee G_2)$$
$$S_2 = (H \wedge G_1) \vee (H \wedge G_2)$$

とするとき，$S_1 = S_2$ となることです．

(a) 次のそれぞれの等式が成り立つことを確かめてください．

$$\lfloor G_1 \vee G_2 \rfloor = \lfloor G_1 \rfloor \cup \lfloor G_2 \rfloor$$
$$\lceil G_1 \wedge G_2 \rceil = \lceil G_1 \rceil \cup \lceil G_2 \rceil$$

(b) 次の式が成り立つことを示してください．

$$S_1 = \{\, \lfloor H \rfloor \cap \lfloor G_1 \vee G_2 \rfloor \mid H^R,\ \lceil G_1 \rceil \cap \lceil G_2 \rceil \,\}$$
$$S_2 = \{\, \lfloor H \rfloor \cap \lfloor G_1 \vee G_2 \rfloor \mid \lceil H \rceil,\ \lceil G_1 \rceil \cap \lceil G_2 \rceil \,\}$$

(c) $S_1 - S_2$ を対局することで，$S_1 = S_2$ を証明してください．

解答

(a) 結びの定義および簡単な集合論を使うと，最初の等式を示すことができます．

$$\begin{aligned}\lfloor G_1 \vee G_2 \rfloor &= \{X \mid X \lhd\!\mid G_1 \vee G_2\}\\ &= \{X \mid X \lhd\!\mid G_1 \text{または } X \lhd\!\mid G_2\}\\ &= \lfloor G_1 \rfloor \cup \lfloor G_2 \rfloor\end{aligned}$$

これと対称な式変形で，もう一方の $\lceil G_1 \wedge G_2 \rceil$ の等式も示すことができます．

(b) S_1 は定義より直接導くことができます．S_2 は (a) の結果を使って示すことができます．

$$\begin{aligned}S_2 &= (H \wedge G_1) \vee (H \wedge G_2)\\ &= \{\lfloor H \rfloor \cap \lfloor G_1 \rfloor, \lfloor H \rfloor \cap \lfloor G_2 \rfloor \mid \lceil H \wedge G_1 \rceil \cap \lceil H \wedge G_2 \rceil\}\\ &= \{\ \lfloor H \rfloor \cap \lfloor G_1 \vee G_2 \rfloor \mid \lceil H \rceil, \lceil G_1 \rceil \cap \lceil G_2 \rceil\ \}\end{aligned}$$

(c) $H^R \subseteq \lceil H \rceil$ が成り立つことに注意すると，$S_2 - S_1$ において後手番の対局者が勝つことを示す際に，先手番の対局者の手に対称な手で後手番の対局者が応手できない唯一の手は，$X \in \lceil H \rceil$（しかし $X \notin H^R$）に対して $H^R - X$ とする手です．$\lceil H \rceil$ の定義より $X \mid\!\rhd H$ が成り立ちます．また，S_1 は交わり $H \wedge (G_1 \vee G_2)$ なので，$H \geq S_1$ が成り立ちます．すると $X \mid\!\rhd S_1$ が成り立ち，$X - S_1$ において左は先手番で勝ちます．

6. 次の予想を考えてください．「ゲーム G を標準形とするとき，（最大のものだけでなく）すべての左終局値は，すべての右終局値よりも大きくなる」より正確に述べれば「G が標準形でかつ数ではないならば，任意の G^L および G^R に対して $\mathbf{RS}(G^L) \geq \mathbf{LS}(G^R)$ が成り立つ」となります．

　これに対する反例をあげることで，この予想が正しくないことを証明してください．

解答

$\{2, 1 \pm 2 \mid -2, -1 \pm 2\}$ は標準形ですが，

$$\mathbf{RS}(1 \pm 2) = -1 < 1 = \mathbf{LS}(-1 \pm 2)$$

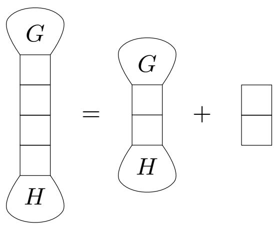
となります．

7. クロバー・ザ・ポンド（CLOBBER THE POND）の局面 ●□●○ および ●□●□●○ について，それぞれの左終局値および右終局値を求めてください．

解答

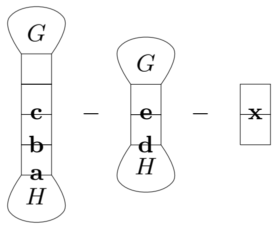
どちらのゲームも，左の第 1 手によって白石は取り除かれます．局面 ●□●○ の左終局値および右終局値は，それぞれ 4 および 2 となります．局面 ●□●□●○ の左終局値および右終局値は，それぞれ 10 および 8 となります．

8. 著者の一人（ウォルフ）は，論文 *Snakes in Domineering Games* において次の等式が成り立つことを主張しました．

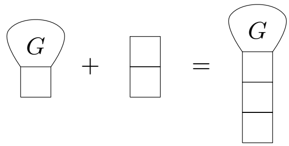


この主張は正しいかもしれませんが，まだ予想の段階です．

この主張に対する次の「証明」はどこが間違っているのかを説明してください．示したいのは，次の差分ゲームにおいて後手番の対局者が勝つことです．



左または右が G または H のどちらか一方だけに手を打つならば，後手番の対局者はそのもう一方に応手して，（帰納法により）0 が残ります．左が b または c で隣接するマスを被う手を打てば，右は x に応手して，≤ 0 となる局面が残ります．左が a で隣接するマスを被う手を打てば，右は d に応手して，0 が残ります．なぜなら，



が成り立つからです．（これは，第 4 章の章末問題 3（103 ページ）からの帰結です.）右が d または e で隣接するマスを被う手を打てば，左はそれぞれ a または b に応手して，**片手枷原理**によって ≥ 0 となる局面を残すことができます．そして最後に，**数避定理**によって，x で隣接するマスを被う右の手は考慮する必要はありません．

解答

数避定理を使うときには，一方の構成要素は数とならないことがわかっている必要があります．

第 7 章

1. $S \subseteq \{1,2,3,4\}$ および $|S| = 2$ を満たすそれぞれの S に対して，SUBTRACTION(S) のニム列を求めてください．

解答

(a) SUBTRACTION$(1,2)$：ニム列の最初の 6 項は 012012 となります．$l=0$，$p=3$ および $a=2$ として系 7.34 を使うと，最初の 5 項の値からこのニム列が $\dot{0}1\dot{2}$ となることがわかります．
(b) SUBTRACTION$(1,3)$：ニム列の最初の 6 項は 010101 となります．$l=0$，$p=2$ および $a=3$ として系 7.34 を使うと，最初の 5 項の値からこのニム列が $\dot{0}\dot{1}$ となることがわかります．
(c) SUBTRACTION$(1,4)$：ニム列の最初の 10 項は 0101201012 となります．$l=0$，$p=5$ および $a=4$ として系 7.34 を使うと，最初の 9 項の値からこのニム列が $\dot{0}101\dot{2}$ となることがわかります．
(d) SUBTRACTION$(2,3)$：ニム列の最初の 10 項は 0011200112 となります．$l=0$，$p=5$ および $a=3$ として系 7.34 を使うと，最初の 8 項の値からこのニム列が $\dot{0}011\dot{2}$ となることがわかります．
(e) SUBTRACTION$(2,4)$：ニム列の最初の 12 項は 001122001122 となります．$l=0$，$p=6$ および $a=4$ として系 7.34 を使うと，最初の 10 項の値からこのニム列が $\dot{0}0112\dot{2}$ となることがわかります．
(f) SUBTRACTION$(3,4)$：ニム列の最初の 14 項は 00011120001112 となります．$l=0$，$p=7$ および $a=4$ として系 7.34 を使うと，最初の 11 項の値からこのニム列が $\dot{0}00111\dot{2}$ となることがわかります．

2. グランディ尺および系 7.34 を使って，次の一山崩しのそれぞれのニム列を計算してください．

(a) SUBTRACTION$(2,3,5)$
(b) SUBTRACTION$(3,5,8)$
(c) SUBTRACTION$(1,3,4,7,8)$

解答

(a) $\textsc{subtraction}(2,3,5)$：ニム列の最初の 20 項は

$$01122300112230011223 0$$

となります．$l=0$，$p=7$ および $a=5$ として系 7.34 を使うと，$0 \le n \le 5$ に対して $\mathcal{G}(n)=\mathcal{G}(n+7)$ となることがわかるので，ニム列は $\dot{0}11223\dot{0}$ となります．

(b) $\textsc{subtraction}(3,5,8)$：ニム列の最初の 20 項は

$$00011122233000111222330$$

となります．$l=0$，$p=11$ および $a=8$ として系 7.34 を使うと，$0 \le n \le 8$ に対して $\mathcal{G}(n)=\mathcal{G}(n+11)$ となることがわかるので，ニム列は $\dot{0}001112223\dot{3}$ となります．

(c) $\textsc{subtraction}(1,3,4,7,8)$：ニム列の最初の 20 項は

$$01012323454010123234$$

となります．$l=0$，$p=11$ および $a=8$ として系 7.34 を使うと，$0 \le n \le 8$ に対して $\mathcal{G}(n)=\mathcal{G}(n+11)$ となることがわかるので，ニム列は $\dot{0}101232345\dot{4}$ となります．

3. 次の all-but 一山崩しのそれぞれの周期を求めてください．

(a) $\textsc{allbut}(1,2,3)$
(b) $\textsc{allbut}(5,6,7)$
(c) $\textsc{allbut}(3,4,6,10)$

解答

(a) $\textsc{allbut}(1,2,3)$：ニム列の最初の 20 項は 00001111222233334444 5 となります．$l=0$，$p=4$ および $a=3$ として補題 7.43 を使うと，最初の 11 項の値から $s=1$ およびニム列が $\dot{0}00\dot{0}$ となることがわかります．

(b) $\textsc{allbut}(5,6,7)$：ニム列の最初の 24 項は

$$0,1,2,3,4,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14$$

となります．$l=0$，$p=10$ および $a=7$ として補題 7.43 を使うと，最初の 25 項の値から $s=5$ およびニム列が $\dot{0}12340123\dot{4}$ となることがわかります．

(c) $\text{ALLBUT}(3,4,6,10)$：ニム列の最初の 28 項は

$$0120120123453453456786786789$$

となります．$l=0$，$p=9$ および $a=10$ として補題 7.43 を使うと，最初の 30 項の値から $s=3$ およびニム列が $\dot{0}1201201\dot{2}$ となることがわかります．

4. ケイレスと同じように対局しますが，ピンの並びの端には球を投げることができないゲームを考えます．ニムの用語でいえば，一つの山から 1 個または 2 個の石を取ることができるが，その山を二つの空でない山に分割しなければならないということです．グランディ尺を使って，このゲームのニム列の最初の 15 項を求めてください．

解答

このゲームのニム列は $000112233114433\cdots$ となります．

5. 系 7.34（180 ページ）を証明してください．

解答

ある l および p に対して，このニム列が任意の $l \le n < l+a$ について $\mathcal{G}(n)=\mathcal{G}(n+p)$ を満たすとします．ここで $n \ge l+a$ とすると

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(n+p) &= \operatorname{mex}\{\mathcal{G}(n+p-a_i) \mid i=1,2,\ldots,k\} \\
&= \operatorname{mex}\{\mathcal{G}(n-a_i) \mid i=1,2,\ldots,k\} \qquad \text{（帰納法により）} \\
&= \mathcal{G}(n)
\end{aligned}$$

となります．

6. 定理 7.36（181 ページ）を証明してください．

解答

大きさが $n < a_1 + mp$ の山に対しては，G および H はまったく同

じ選択肢をもち，それゆえ同じニム値をもちます．$n \geq a_1 + mp$ とすると，H は G と比べて $n - (a_1 + mp)$ を選択肢にもちます．しかしながら，$\mathcal{G}(n - (a_1 + mp)) = \mathcal{G}(n - a_1)$ となり，$n - a_1$ は G の選択肢となっているので，H の選択肢 $n - (a_1 + mp)$ はニム値の計算に影響しません．

7. （ニムの一般化となっている）**ポリニム** (POLYNIM) は，非負整数の係数をもつ 1 変数多項式を何個か使います．許される手は，多項式を一つ選んで，その多項式の一つの項の係数を小さくし，その項よりも低い次数の項の係数のいくつかを変更するか，またはそのままにしておくことです．たとえば，$3x^2 + 15x + 3$ を $0x^2 + 19156x + 2345678 = 19156x + 2345678$ にすることができます．このポリニムを解析してください．具体的には，定理 7.12 と同じように，ある局面が $\mathcal{P}$ 局面となるかどうかを決定する方法を見つけてください．

解答

$i > 0$ に対して x^i の項がなければ，このゲームは**ニム**と等価になることに注意してください．

主張：与えられた多項式 $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_k(x)$ に対して n_i をこれらの多項式に含まれる x^i の係数のニム和とすると，すべての i について $n_i = 0$ となるとき，そしてそのときにかぎり，$P_1(x), P_2(x), \ldots, P_k(x)$ の直和は $\mathcal{P}$ 局面となる．

主張の証明：定理 2.13 を使って証明します．なにもない局面はすべての i について $n_i = 0$ となり，$\mathcal{P}$ に属します．

ある i について $n_i \neq 0$ となるとします．j を $n_j \neq 0$ となる最大の添え字とします．定理 7.12 の証明では，n_j に対するニム和を構成する一つの数の値を減らして，その結果のニム和を 0 にできることを示しました．この数を係数とする x^j の項をもつ多項式を一つ選びます．そしてこの係数を，定理 7.12 の証明と同じ値に減らします．ある $i \neq j$ について $n_i \neq 0$ ならば，$i < j$ となりますから，この多項式の x_i の係数をニム和が 0 になるように調整できました．ちなみに，これらの係数を大きくするのは許される手です．

一方，すべての i について $n_i = 0$ ならば，定理 7.12 と同じように，係数の値を減らす手によって，n_i のうちの一つは 0 ではなくなります．

8. $q = 1, 2, 3$ に対して SUBTRACTION$(1, 2q)$ のニム列を求めてください．任意

の q に対して，SUBTRACTION$(1, 2q)$ のニム列を表す式を見つけてください．

解答

SUBTRACTION$(1, 2)$ のニム列は $\dot{0}1\dot{2}$ となります．SUBTRACTION$(1, 4)$ のニム列は $\dot{0}101\dot{2}$ となります．SUBTRACTION$(1, 6)$ のニム列は $\dot{0}10101\dot{2}$ となります．

主張： SUBTRACTION$(1, 2q)$ のニム列は，$(01)^q2$ を周期単位とする純周期的となる．

一般に，最初の $2q$ 項は $0101\cdots1$ となります．なぜなら，許される手は山の石の数を 1 だけ減らすことだけだからです．大きさが $2q$ の山の選択肢のニム値は 0 および 1 となるので，$\mathcal{G}(2q) = \mathrm{mex}\{0, 1\} = 0$ となります．そして $\mathcal{G}(2q + 1) = \mathrm{mex}\{1, 2\} = 0$ となります．$2 \le i \le 2q - 1$ に対して，大きさが $2q + i$ の山に対する手は大きさ $2q + i - 1$ および i の山とすることで，これらの選択肢の $\mathcal{G}$ の値は，i が偶数のときはどちらも 0，i が奇数のときはどちらも 1 となります．すると，$l = 0$，$p = 2q + 1$ および $a = 2q$ として系 7.34 を使うと，この主張が証明できます．

9. $q > 1$ ならば SUBTRACTION$(q, q + 1, q + 2)$ のニム列は $\dot{0}0^{q-1}1^q2\dot{2}$ となることを示してください．（x^b は，x の b 個の繰り返しを表します．）

解答

$l = 0$，$p = 2q + 2$ および $a = q + 2$ として系 7.34 を使うと，最初の $3q + 4$ 項だけを計算すればよいことになります．最初の q 項は 0 となります．なぜなら，どちらの対局者も打つ手がないからです．次の q 項は 1 となります．なぜなら，すべての選択肢のニム値は 0 だからです．

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(2q) &= \mathrm{mex}\{\mathcal{G}(q), \mathcal{G}(q-1), \mathcal{G}(q-2)\} = \mathrm{mex}\{1, 0, 0\} = 2\\ \mathcal{G}(2q+1) &= \mathrm{mex}\{\mathcal{G}(q+1), \mathcal{G}(q), \mathcal{G}(q-1)\} = \mathrm{mex}\{1, 1, 0\} = 2\end{aligned}$$

$2 \le i \le q - 1$ に対して，大きさ $2q + i$ の山はニム値が 0 となる選択肢をもたないので，そのニム値は 0 となります．そして

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(3q) &= \mathrm{mex}\{\mathcal{G}(2q), \mathcal{G}(2q-1), \mathcal{G}(2q-2)\} = \mathrm{mex}\{2, 1, 1\} = 0\\ \mathcal{G}(3q+1) &= \mathrm{mex}\{\mathcal{G}(2q+1), \mathcal{G}(2q), \mathcal{G}(2q-1)\} = \mathrm{mex}\{2, 2, 1\} = 0\\ \mathcal{G}(3q+2) &= \mathrm{mex}\{\mathcal{G}(2q+2), \mathcal{G}(2q+1), \mathcal{G}(2q)\} = \mathrm{mex}\{0, 2, 2\} = 1\end{aligned}$$

$$\mathcal{G}(3q+3) = \mathrm{mex}\{\mathcal{G}(2q+3), \mathcal{G}(2q+2), \mathcal{G}(2q+1)\} = \mathrm{mex}\{0,0,2\} = 1$$

となります．

10. SUBTRACTION$(1, 2, 4, 8, 16, \ldots, 2^i, \ldots)$ を解析してください．

解答

このニム列の最初の 9 項は 012012012 となります．すべての 2 のベキは 3 を法として 1 または 2 と合同となるので，帰納法により，大きさが $n \geq 2^i$ の山の選択肢 $n-2^i$ は $n-2$ または $n-1$ と同じニム値となります．すなわち，このニム列は $\dot{0}1\dot{2}$ となります．

11. それぞれの対局者の手番では，山にある石の少なくとも半分を取り除かなければならない**ニム**の変形[原註 2]を解析してください．

解答

まず，$\mathcal{G}(0) = 0$ です．$\mathcal{G}(n) (n > 0)$ に対しては，次の三つの互いに同値な特徴づけを与えます．

- $\mathcal{G}(n)$ は n を 2 進展開したときの桁（ビット）数に等しい．
- $\mathcal{G}(n) = 1 + \lfloor \log_2(n) \rfloor$
- $\mathcal{G}(n) = k$（ただし k は $2^{k-1} \leq n < 2^k$ を満たす整数）

証明： 2^k の選択肢には，2^{k-1} の選択肢がすべて含まれ，くわえて 2^{k-1} とする選択肢があります．すると，帰納法により，$\mathcal{G}(2^k) = \mathcal{G}(2^{k-1}) + 1$ となります．また帰納法により，$1 \leq i \leq 2^k$ に対して $2^k + i$ の選択肢は 2^k の選択肢と同じニム値をもちます．つまり，$\mathcal{G}(2^k + i) = \mathcal{G}(2^k)$ となります．帰納法の仮定が成り立たない $n = 0$ および $n = 1$ の場合は，それぞれ $\mathcal{G}(0) = 0$ および $\mathcal{G}(1) = 1$ となります．

12. ALLBUT(1)，ALLBUT(2) および ALLBUT(3) のそれぞれの周期を求めてください．また，ALLBUT(q) の周期を予想し，それを証明してください．

[原註 2] 山から半分より多くの石を取り除いてはいけないとするゲームは，驚くべき自己相似性をもつニム列をもちます．そのニム列からそれぞれの数が初めて出現する項を取り除くと，残った列は元のニム列と一致するのです．詳しくは [Lev06] を参照してください．

解答

ALLBUT(1) は，ニム列 $\dot{0}\dot{0}$ および増分 1 をもちます．ALLBUT(2) は，ニム列 $\dot{0}10\dot{1}$ および増分 2 をもちます．ALLBUT(3) は，ニム列 $\dot{0}1201\dot{2}$ および増分 3 をもちます．

主張：ALLBUT(q) は，ニム列 $\dot{0}, 1, \ldots, q-1, 0, 1, \ldots \dot{q-1}$ および増分 q をもつ．

主張の証明：$p = 2q$，$a = q$ および $l = 0$ として補題 7.43 を使うと，ニム列の最初の $n = 0+2a+p = 4q$ 項を調べれば周期がわかります．$0 \leq n \leq q-1$ に対して，大きさ n の山は**ニム**に等しいゲームとなるので，$\mathcal{G}(n) = n$ となります．$0 \leq n \leq q-1$ に対して，大きさ $q+n$ の山は n だけを選択肢としてもちません．つまり，$\mathcal{G}(q+n)$ は 0 から $q-1$ までの整数のうち $\mathcal{G}(n)$ を除いたものの最小除外値となり，$\mathcal{G}(q+n) = \mathcal{G}(n) = n$ となります．そして，$\mathcal{G}(2q) = \mathrm{mex}\{0, 1, \ldots, q-1\} = q$ となります．また，$1 \leq n \leq q-1$ に対して，大きさ $2q+n$ の山は $0, 1, \ldots, q-1$ を選択肢にもつので，$\mathcal{G}(2q+n) > q-1$ が成り立ちます．そして，この $2q+n$ の山は $0 \leq i \leq n-1$ に対して $2q+i$ を選択肢にもちます．それゆえ，$1 \leq n \leq q-1$ に対して $\mathcal{G}(2q+n) = q+n$ となります．$0 \leq n \leq q-1$ に対して，大きさ $3q+n$ の山は $2q+n$ だけを選択肢に含まないので，$\mathcal{G}(3q+n) = \mathcal{G}(2q+n) = q+n$ となります．最後に，大きさ $4q$ の山はニム値 $0, 1, \ldots, 2q-1$ を選択肢にもち $2q$ は選択肢に含まれないので，$\mathcal{G}(4q) = 2q$ となります．

13. ALLBUT$(1, 2)$，ALLBUT$(2, 3)$ および ALLBUT$(3, 4)$ のそれぞれの周期を求めてください．また，ALLBUT$(q, q+1)$ の周期を予想し，それを証明してください．

解答

ALLBUT$(1, 2)$ がニム列 $\dot{0}0\dot{0}$ および増分 1 をもつことは容易に確かめられます．ALLBUT$(2, 3)$ は，ニム列 $\dot{0}10\dot{1}$ および増分 2 をもちます．ALLBUT$(3, 4)$ は，ニム列 $\dot{0}1201\dot{2}$ および増分 3 をもちます．

主張：$q > 1$ に対して，ALLBUT$(q, q+1)$ は，ニム列 $\dot{0}, 1, \ldots, q-1, 0, 1, \dot{q-1}$ および増分 q をもつ．

主張の証明：$p = 2q$，$a = q$ および $l = 0$ として補題 7.43 を使うと，ニム

列の最初の $4q$ 項を調べれば周期がわかります．$0 \leq n \leq q-1$ に対して，大きさ n の山のニム値は n となります．$0 \leq n \leq q-1$ に対して，大きさ $q+n$ の山において，q より小さくて選択肢に含まない可能性があるのは $\mathcal{G}(n) = n$ および $\mathcal{G}(n-1) = n-1$ だけです．しかし，$\mathcal{G}(n-1) = \mathcal{G}(q+n-1)$ が成り立ち，$q+n-1$ は $q+n$ の選択肢となるので，$\mathcal{G}(q+n) = \mathcal{G}(n) = n$ となります．

$n \geq 0$ に対して，大きさ $2q+n$ の山は，0 から $q-1$ までをすべて選択肢としてもちます．つまり，$0 \leq n \leq q-1$ に対して $\mathcal{G}(2q+n) = q+n$ となります．大きさが $3q$ の山において，$2q$ より小さくて選択肢に含まない可能性があるのは $\mathcal{G}(2q)$ および $\mathcal{G}(2q-1)$ だけです．しかし，$\mathcal{G}(2q) = q$ および $\mathcal{G}(2q-1) = \mathcal{G}(q-1) = q-1$ となるので，$\mathcal{G}(3q) = 2q$ となります．$1 \leq n \leq q-1$ に対して，大きさ $3q+n$ の山はニム値 $0, 1, \ldots, q-1$ および $\mathcal{G}(3q+i)(0 \leq i < n)$ を選択肢にもつので，$\mathcal{G}(3q+n) = q+n$ となります．最後に，大きさ $4q$ の山はニム値 $0, 1, \ldots, 2q-1$ を選択肢にもち $2q$ を選択肢に含まないので，$\mathcal{G}(4q) = 2q$ となります．

14. $q < r$ に対して，$\textsc{allbut}(q, r)$ の周期を求めてください．（ヒント：$r = 2q$ および $r \neq 2q$ の場合を分けて考えてください．）

解答

$\textsc{allbut}(q)$ は，ニム列 $\dot{0}, 1, \ldots, q-1, 0, 1, \ldots, q \dot{-} 1$ および増分 q をもち，（あとで示すように）多くの場合，$\textsc{allbut}(q, r)$ のニム列はこれに等しくなります．鍵となるのは，ちょうど q 項隔たった相等しいニム値です．具体的には，$\mathcal{G}(n)$ より小さいニム値にする手は，（$\mathcal{G}(n-q)$ が $\mathcal{G}(n-2q)$ と等しいときは）$\mathcal{G}(n-q)$ を除いて，選択肢にそれぞれ 2 回現れます．つまり，$r = 2q$ でなければ，ニム列は同一となります．

$r = 2q$ のときは，$\textsc{allbut}(q, 2q)$ は，ニム列 $\dot{0}, 1, 2, \ldots, q-1, 0, 1, 2, \ldots, q-1, 0, 1, 2, \ldots, q \dot{-} 1$ および増分 q をもちます．

15. 定理 7.48（190 ページ）を証明してください．

解答

いつものように，帰納法を使って証明します．$n \geq 2l + p + a + 1$ および

$S = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ とします．山を分割しないときには，$n+p$ の選択肢は $n+p-a_i(i = 1, 2, \ldots, k)$ となります．$n+p-a_i \geq 2l+2p+a+1-a_i > 2l+2p$ が成り立つので，$\mathcal{G}(n + p - a_i) = \mathcal{G}(n - a_i)$ となります．山を分割するときの選択肢は，大きさ $n + p - a_i - j$ の山と大きさ j の山の直和 $(i = 1, 2, \ldots, k)$ となります．$n + p - a_i - j \geq j$ と仮定すると，この二つの山の大きいほうは，つねに少なくとも $\frac{1}{2}(n + p - a_i)$ の大きさをもちます．$n + p - a_i \geq 2l + p + a + 1 + p - a_i \geq 2l + 2p + 1$ が成り立つので，大きいほうの山は，少なくとも $l + p + 1$ の大きさとなります．これより次の式が成り立ちます．

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(n+p) &= \operatorname{mex}\left(\begin{array}{r} \{\mathcal{G}(n+p-a_1), \mathcal{G}(n+p-a_2), \ldots, \mathcal{G}(n+p-a_k)\} \\ \bigcup \{\mathcal{G}(n+p-a_i-j) \oplus \mathcal{G}(j) \mid 1 \leq i \leq k, j \geq 1\} \end{array}\right) \\
&= \operatorname{mex}\left(\begin{array}{r} \{\mathcal{G}(n-a_1), \mathcal{G}(n-a_2), \ldots, \mathcal{G}(n-a_k)\} \qquad\qquad \\ \bigcup \{\mathcal{G}(n-a_i-j) \oplus \mathcal{G}(j) \mid 1 \leq i \leq k, j \geq 1\} \end{array}\right) \\
&= \mathcal{G}(n)
\end{aligned}$$

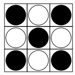
16. 矩形返し (TURN-A-BLOCK) は，本書のウェブサイト www.lessonsinplay.com に規則があり，計算機と対局することもできます．このゲームの必勝戦略を見つけてください．読者は，3×3 および 5×3 の盤において，上級レベルで対局してもつねに計算機に勝てるようにしてください．また，5×5 以下の盤ではどちらの対局者が勝てるかを決定してください．

解答

それほど自明ではありませんが，位置 (x, y) に置かれた駒は，それぞれある n が存在して $*n$ を値とします．そして，いくつかの駒の塊に対するニム値は，そこに含まれる駒の値のニム和によって計算できます．それぞれの駒の値は，その駒を裏返してたどりつくすべての局面を見つけだすことで決定できます．これらの駒の値は，次の表のとおりです．

1	2	1	4	1	2	1	8
2	3	2	8	2	3	2	12
1	2	1	4	1	2	1	8
4	8	4	6	4	8	4	11
1	2	1	4	1	2	1	8
2	3	2	8	2	3	2	12
1	2	1	4	1	2	1	8
8	12	8	11	8	12	8	13

たとえば，3×3 の局面

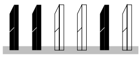
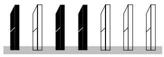
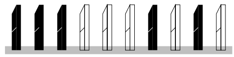


の値は $*1 + *1 + *3 + *1 + *1$ となり，勝つことのできる手がいくつもあります．中央の駒を裏返すことですぐに勝つことができますし，すべての駒を裏返す手も $*2 + *2 + *2 + *2$ として勝つことができます．

証明はそれほどむずかしくないので省略します．

第 8 章

1. 次のドミノ倒しのそれぞれの局面について，標準形，平均値および温度を求めてください．

   $A =$  $B =$  $C =$ 

   また，$A + B + C$ の左終局値および右終局値を求めてください．

   解答

$$
\begin{aligned}
A &= \left\{1 \,\middle|\, -\frac{1}{2}\right\} & m(A) &= \frac{1}{4} & t(A) &= \frac{3}{4} \\
B &= \left\{\frac{1}{2} \,\middle|\, -2\right\} & m(B) &= -\frac{3}{4} & t(B) &= \frac{5}{4} \\
C &= \left\{2 \,\middle\|\, -\frac{1}{2} \,\middle|\, -1\right\}
\end{aligned}
$$

   C^R の温度は $\frac{1}{4}$ で，$C_{\frac{1}{4}} = \left\{\frac{7}{4} \,\middle|\, -\frac{1}{2}*\right\}$ となります．これを $\frac{9}{8}$ だけ冷却すると $C_{\frac{11}{8}} = \frac{5}{8}*$ となるので，$m(C) = \frac{5}{8}$ および $t(C) = \frac{11}{8}$ が得られます．

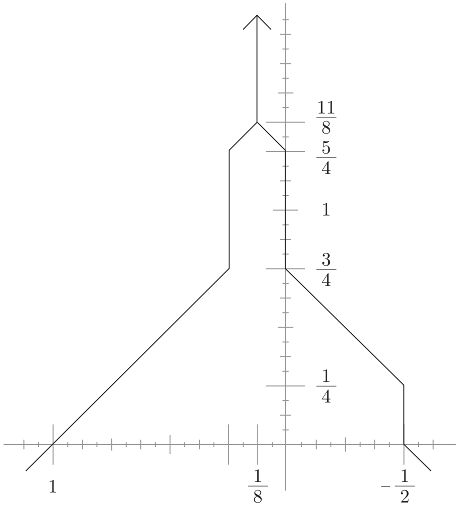
   $\mathbf{LS}(A + B + C) = 1$ および $\mathbf{RS}(A + B + C) = -\frac{1}{2}$ となります．

2. 章末問題 1 の $A + B + C$ の標準形は次のとおりです．

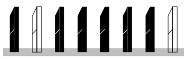
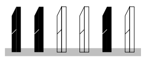
$$
\left\{
\begin{array}{c}
\left\{\frac{7}{2}\middle|2\middle\|1\middle|-\frac{1}{2}\right\}, \\
\left\{\frac{7}{2}\middle|2\middle|\middle\|1\middle|\frac{1}{2}\middle\|-\frac{1}{2}\middle|-1\right\}
\end{array}
\middle|
\begin{array}{c}
\left\{1\middle|-\frac{1}{2}\middle|\middle\|-\frac{3}{2}\middle|-2\middle\|-3\middle|-\frac{7}{2}\right\}, \\
\left\{1\middle|\frac{1}{2}\middle\|-\frac{1}{2}\middle|-1\middle|\middle\|-\frac{3}{2}\middle|-2\middle\|-3\middle|-\frac{7}{2}\right\}
\end{array}
\right\}
$$

   このとき，$A + B + C$ の温度測定図を作図してください．（標準形が複雑だからといって嫌にならないでください．同じ局面が何度も現れているだけですから．）がんばって自力で温度測定図を作図する傍らで，CGSuite を使って，たとえば `Plot(Thermograph({1|-1/2}))` などの結果から答えが合っているか確認してください．

解答



3. 次のドミノ倒しの局面

$G =$  および $H =$ 

に対して，G，H および $G+H$ それぞれの標準形，終局値および温度測定図を求めてください．

解答

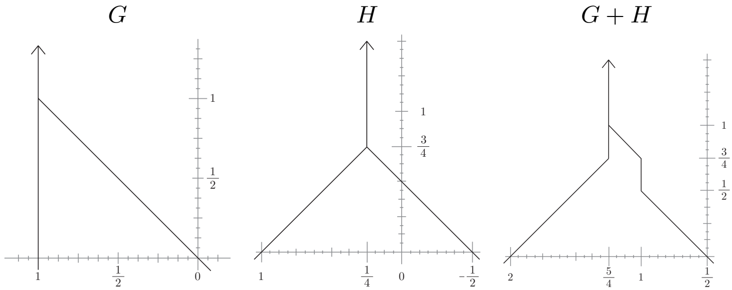
$$G = \{3 \mid 1 \parallel 0\} \qquad m(G) = 1 = t(G) \qquad \mathbf{LS}(G) = 1 \quad \mathbf{RS}(G) = 0$$

$$H = \left\{1 \;\middle|\; -\frac{1}{2}\right\} \quad m(H) = \frac{1}{4} \quad t(H) = \frac{3}{4} \quad \mathbf{LS}(H) = 1 \quad \mathbf{RS}(H) = -\frac{1}{2}$$

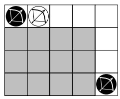
$$G + H = \left\{4 \;\middle|\; \frac{5}{2} \;\middle\|\; 2 \;\middle|\; \frac{1}{2} \;\middle|\!\middle|\!\middle|\; \frac{1}{2}, \left\{1 \;\middle|\; -\frac{1}{2}\right\}\right\}$$

$$m(G+H) = \frac{5}{4} \quad t(G+H) = 1 \quad \mathbf{LS}(G+H) = 2 \quad \mathbf{RS}(G+H) = \frac{1}{2}$$

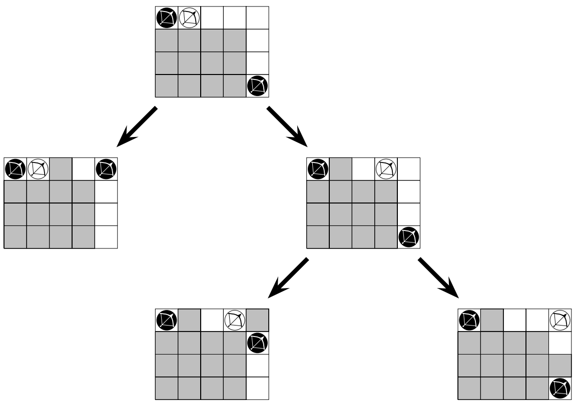
それぞれの温度測定図は次のとおりです．



4. 次のアマゾンの局面の終局値，比較不能区間，平均値および温度を求めてください．



解答



標準形は $G = \{4 \mid \{1 \mid -3\}\}$ となります．（この右の第 1 手は，右上隅に移動するほかの手よりも有利になります．）$\mathbf{LS}(G) = 4_R$ および $\mathbf{RS}(G) = 1_R$ となるので，比較不能区間は $[-3, -1)$ となります．

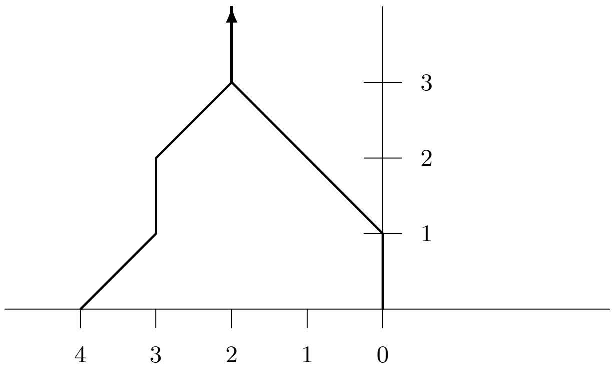
G^R の温度は 2 となり，（とくに）$G_2 = \{4 - 2 \mid \{1 \mid -3 + 2{\cdot}2\}\} = \{2 \mid 1*\}$ となります．$\{2 \mid 1\}$ を $\frac{1}{2}$ だけ冷却すると，$\left\{\frac{3}{2} \,\middle|\, \frac{3}{2}\right\}$ となります．つまり，G の平均値は $m = 1\frac{1}{2}$ となり，温度は $t = 2\frac{1}{2}$ となります．

5. （自由解答形式）習熟するまで，さまざまな熱いゲームの平均値および温度を

計算する練習をしてください．まず，$\{a \,\|\, b \mid c\}$ の形のゲームから計算してください．これに選択肢を追加すると何が起きるか見てください．そして，CGSuite を使って，答えを確認してください．また，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$ および $\frac{3}{8}$ などの温度をもつゲームを見つけてください．

計算したなかから 2，3 のゲームを選んで，温度測定図を丁寧に作図してみてください．温度測定図の作図法をきちんと理解しているかどうかがわかります．

6. (a) 次の温度測定図をもつゲームを見つけてください．

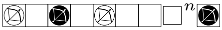


(b) この温度測定図をもつ任意のゲーム G は，0 と比べてどのようになっているでしょうか．その結果を具体的に述べ，その理由を説明してください．（たとえば，この温度測定図をもつすべてのゲーム G は 0 よりも大きいでしょうか．0 より小さいものもあるでしょうか．それとも比較不能のものもあるでしょうか．）

解答

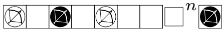
この温度測定図をもつゲームとして，たとえば $\{7 \,\|\, 4 \mid 2 \,|||\, 0 \mid -2\}$ および $\{7 \,\|\, 4 \mid 2 \,|||\, * \mid -2\}$ があります．前者は 0 と比較不能ですが，後者は 0 よりも大きくなります．一般に，G は，0 よりも大きいかまたは比較不能となります．

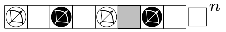
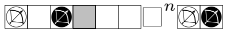
この温度測定図をもつそのほかのゲームとして $\{\{7 \mid 3\}, 4 \,\|\, 0 \mid -2\} > 0$ および $\{\{7 \mid 3\}, 4 \,\|\, 0 \mid -2\} \parallel 0$ があります．

7.  の形のアマゾンの局面の終局値および比較不能区間を求めてください．そして，その平均値はつねに $-\frac{1}{4}$ となることを示してください．

解答

どちらの対局者も最も左側にあるそれぞれの駒を動かすのが優位な手となるので，

$G =$ 

$= \{$  $\mid$  $\}$

$$= \{\{1 \mid *\} + n + 1 \mid -n - 2*\}$$

$$= \{\{n + 2 \mid n + 1*\} \mid -n - 2*\}$$

となります．すると $\mathbf{LS}(G) = (n + 1)_R$ および $\mathbf{RS}(G) = (-n - 2)_R$ となり，比較不能区間は $[-n - 2, n + 1)$ となります．

G を $\frac{1}{2}$ だけ冷却すると $G_{\frac{1}{2}} = \left\{(n+1)* \,\middle|\, -n - \frac{3}{2}\right\}$ が得られ，この平均値は $\frac{1}{4}$ となります．

8. 一山崩し SUBTRACTION$(1, 4, 10 \mid 4, 10, 13)$ は，周期 14 の純周期的なニム列をもちます．その 1 周期は 0，1，2，3，$\{3 \,|\, 0\}$，$1*$，$2*$，$3*$，3，$\{3 \,|\, 1*\}$，$\{2*, \{3 \,|\, 1*\} \,|\, 0\}$，$\{3* \,|\, 1\}$，$\{3 \,|\, 2\}$，$\{3, \{3 \,|\, 2\} \,|\, 0\}$ となります．G を，10，20，30，40 および 50 の大きさの山をそれぞれ 10 個，計 50 個の山で対局するゲームとするとき，$x - \epsilon \leq G \leq x + \epsilon$ を満たす数 x および ϵ を決定してください．ϵ をどこまで小さくできるでしょうか．

解答

$g(n)$ を大きさ n の山の局面の値とします．10 個の $g(10)+g(20)+g(30)+g(40)+g(50)$ の複製，すなわち 10 個の $G = g(10)+g(6)+g(2)+g(12)+g(8)$ の複製で対局します．それぞれの直和成分の 10 個の複製の値は次の表のとおりです．

n	$g(n)$	$10 \cdot g(n)$
2	2	20
4	$\{3 \mid 0\}$	15
6	$2*$	20
10	$\{2*, \{3 \mid 1*\} \mid 0\}$	?
12	$\{3 \mid 2\}$	25

ここで $g(10)$ を除いては，それぞれを 2 倍すると整数になります．大きい k に対して $k \cdot g(10)$ は簡単な形にはならないことがわかります．しかし，$g(10)$ の平均値は 1 で，温度は 1 となります．すると，G の平均値は $10 + 20 + 15 + 20 + 10 + 25 = 90$ で，温度は 1 となります．つまり，任意の $\epsilon > 1$ に対して $90 - \epsilon \leq G \leq 90 + \epsilon$ が成り立ちます．

9. $t(G) \neq t(H)$ ならば $t(G + H) = \max\{t(G), t(H)\}$ が成り立つことを示してください．

解答

$t(G) > t(H)$ と仮定しても一般性を失いません．$\tau = t(G)$ とすると，G_τ は温くなく，H_τ は数になることがわかります．すると，冷却の線形性および**数移動定理**によって，$(G + H)_\tau = G_\tau + H_\tau$ は温くなります．

10. 補題 8.9 の X，Y および $X + Y$ のなかの少なくとも一つが数となる場合を証明してください．

解答

X，Y および $X + Y$ のなかの二つまたは三つが数であれば，三つすべてが数となるので結果は自明です．そこで，$X = x$ は数で，Y および $X + Y$ は数でないとします．すると，定理 6.18 より，$(x + Y)^L = x + Y^L$ および $(x+Y)^R = x+Y^R$ が成り立ちます．すると，$x+Y$ の終局木は，Y の終局木と同じ形で，それに現れるすべての局面は x を加えたものになります．冷却の定義の帰納的な部分に当てはまらないときも，t だけの冷却によってこの性質は保たれるので，そこから補題の結果が得られます．Y が数のときも，明らかに同じ議論が成り立ちます．また $X + Y = z$ が数のときも，$-z + Y = -X$ として，任意のゲーム X および非負の実数 t に対して $(-X)_t = -X_t$ が成

り立つことを使うと，同じ議論が成り立ちます．

11. U をノートン単位，すなわち標準形の正のゲームとします．

(a) 任意のゲーム G に対して，U が全微小ならば $G \cdot U$ も全微小となることを証明してください．

(b) U が無限小ならば，$G \cdot U$ もまた無限小となることを証明してください．

解答

(a) 二つの全微小ゲームの和および差は全微小ゲームとなります．なぜなら，その和および差のすべての選択肢は全微小ゲームとなるからです．この条件を満たすようにノートン積は定義されているので，示したいことが証明できました．

(b) U を無限小とします．$G = n$ が整数のときは，無限小同士の和は無限小となるので，$n \cdot U$ も無限小となります．次に G が整数でないとして，ノートン積の定義と同じく $\tau = U + \mathcal{I}$ とします．

これ以降の議論では，X が無限小で Y が $\leq x$ となる右終局値をもつならば，$X + Y$ は $\leq x$ となる左終局値をもつという事実を繰り返し使います．この事実は，右が先手番で $X + Y$ を対局することで容易に確認できます．右はまず Y に対して手を打った後は，左の手の結果が数にならないかぎり，左が手を打った構成要素に応手します．左の手の結果が数になったときは，もう一方の構成要素に手を打ちます．（定理 6.11 より，この手によって悪くなることはありません．）

$U > 0$ の右終局値および左終局値は 0 となるので，それぞれの U^L の右終局値は高々 0 となり，それぞれの U^R の左終局値は少なくとも 0 となります．すると，前述の事実によって，すべての $I \in \mathcal{I}$ の右終局値は高々 0 となります．ここで，帰納法により $G^L \cdot U$ および $G^R \cdot U$ は無限小となるので，（再度，前述の事実を使うと）$G \cdot U = \left\{ \mathcal{G}^L \cdot U + \tau \,\middle|\, \mathcal{G}^R \cdot U - \tau \right\}$ の左終局値は高々 0 となり，右終局値は少なくとも 0 となります．これは，$G \cdot U$ が無限小ということです．

12. U をノートン単位，すなわち正のゲームの標準形とします．定義 8.17（214 ページ）で定義した $\tau = U + \mathcal{I}$ に対して，τ の値はすべて 0 以上となるこ

とを証明してください．（ヒント：代表的な $t \in \tau$ は $U + U^L - U$ または $U + U - U^R$ の形をしています．U が打消し可能な選択肢も劣位な選択肢ももたないという事実を使って，それぞれの t が $t \geq 0$ となることを示してください．）

解答

ヒントで述べたように，$U^L \geq 0$ および $U + U - U^R \geq 0$ を示します．前者については，$U^{LR} \leq 0$ となる U^{LR} はありません．なぜなら，打消し可能な選択肢はないので，U^L において右は先手番で勝ちとはならず，$U^L \geq 0$ が成り立ちます．後者については，$U + U - U^R$ において右が打つことができる手は，$U + U - U^{RL}$ または $U^{R'} + U - U^R$ とする手です．$U + U - U^{RL}$ において左は先手番で $U - U^{RL}$ とする手で勝ちます．なぜなら $U > 0$ で，$U - U^{RL}$ は 0 より小さいかまたは等しくはならないからです．もしそうなったとすると $U^{RL} \geq U$ は打消し可能な選択肢となってしまいます．同様にして，$U^{R'} + U - U^R$ において，左は先手番で $U^{R'} - U^R$ とする手で勝ちます．なぜなら，（U は劣位な選択肢をもたないので，）この差は 0 より小さくも等しくもならず，$U > 0$ となるからです．

13. 章末問題 12 において，$t = 0$ となるノートン単位 U をすべて求めてください．

解答

t が 0 のときは，$U > 0$ より，すべての誘因は負となります．すると，定理 6.19 によって，U は数になります．すべての誘因が $-U$ となる正の数は，$n \geq 0$ として $\frac{1}{2^n}$ の形になります．

14. 定理 8.22 の三つの主張がすべて成り立つためには，ノートン積の定義における $U > 0$ は必須の条件であることを確かめてください．具体的には，この定理の三つの主張それぞれについて，$U = *$ とするとその主張が成り立たないようなゲーム A および B を見つけてください．単調性および分配法則に対する反例では，A および B は標準形でなければなりません．

解答

この場合，$G \cdot *$ は，整終局値を取る G のそれぞれの局面を，単に n が奇

数か偶数かに応じて $*$ または 0 で置き換えるだけです．

表記形式に依存しないこと： $A = \{3, \pm 1 \mid 0\}$ および $B = \{3 \mid 0\}$ とすると $A = B$ が成り立ちますが，$A \cdot * = \{*, \pm * \mid 0\} = \uparrow *$ に対して $B \cdot * = \{3 \mid 0\} \cdot * = \downarrow$ となり，等しくなりません．

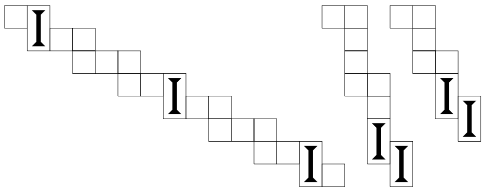
単調性： $A = 1$ および $B = 0$ とすると，$A \cdot * = *$ および $B \cdot * = 0$ となります．

分配法則： $A = B = \frac{1}{2}$ とすると，$A \cdot * = B \cdot * = \downarrow$ となりますが，$(A + B) \cdot * = *$ となり分配法則が成り立ちません．

15. 練習問題 8.23（219 ページ）の局面において，左が勝つための手を見つけてください．（勝つことのできる手は全部で 7 通りあります．）

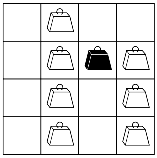
解答

左が勝つことのできる手は次の図のとおりです．

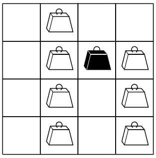


第 9 章

1. 次のクロバーの局面の値を求めてください．

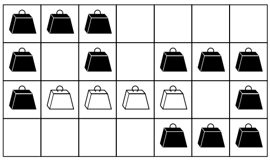


解答



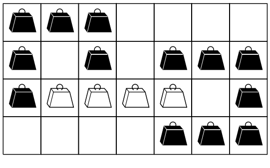
$$= \{\downarrow, \uparrow * \mid 0\} = \{\uparrow * \mid 0\} = \downarrow^{2} = .0\bar{1}$$

2. 次のクロバーの局面の値を求めてください．



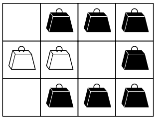
解答

$G =$

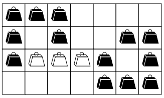


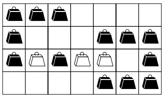
とします．手計算で G の値を求めるのはかなり退屈ですが，.01 がクロバーのどのような局面となるかが手がかりになります．ここに，主たる局面の値を示しますが，CGSuite の（CLOBBER とあわせて）*explorer* 機能および *expand all options* 機能を使って，指定した局面とその後継となるすべての局面を評価すると，時間を大幅に短縮できます．まず，次の特徴的な局面の値を求め

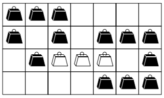
ます．

 $= \{6\cdot\uparrow* \mid 5\cdot\uparrow\} = .61*$

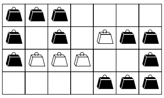
G の左選択肢は次のとおりです．

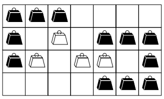
$a :=$  $= \{6\cdot\uparrow \mid 5\cdot\uparrow, 5\cdot\uparrow*\} = \{.6 \mid .5, .5*\}$

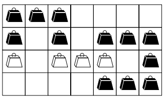
$b :=$  $= \{7\cdot\uparrow* \mid \text{⤊}\} = \{.7* \mid .3\}$

$c :=$  $= \{11\cdot\uparrow* \,\big|\, (6\cdot\uparrow*)^{\rightarrow 2}\} = \{.(11)* \mid .61*\}$

ここで，$c > a$ および $c > b$ となります．一方，G の右選択肢は次のとおりです．

$d :=$  $= 5\cdot\uparrow = .5$

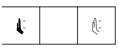
$e :=$  $= (8\cdot\uparrow)^{\rightarrow 2} = .81$

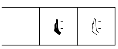
$f :=$  $= \{0 \,\big|\, (7\cdot\uparrow*)^{\rightarrow 2}\} = \{0 \mid .71*\}$

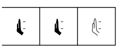
ここで d が最小の選択肢となります．これらより，G の値は次のとおりとなります．

$$G = \{\{.(11)* \mid .61*\} \mid .5\} = .61*$$

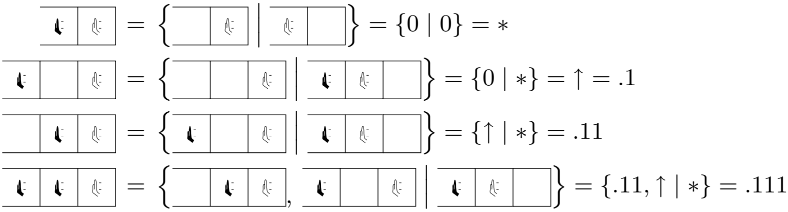
3. 次の全微小版プッシュのそれぞれの局面の値を求めてください．それぞれの値は，$\uparrow$ を底とする昇進記法（229 ページ）で表してください．

(a) 

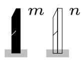
(b) 

(c) 

解答



4. 次の形のドミノ倒しの局面の左誘因および右誘因を求めてください．



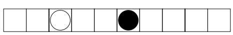
また，これらのゲームの和および差を対局するときの具体的な指針を示してください．（これは，第 4 章の章末問題 4 のつづきです．）

解答

原著者による注：この問題は第 5 章に置くべきです．

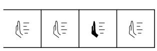
左誘因および右誘因はどちらも $\{m+n-2 \mid 0\}$ となり，対局者はつねに（ドミノ牌の色に関係なく）もっとも長いドミノ牌の並びに対して手を打つべきです．（$a > b$ となるとき，そしてそのときにかぎり，$\{a \mid 0\} > \{b \mid 0\}$ となることに注意してください．）

5. 全微小版クリア・ザ・ポンドの局面



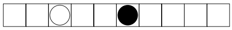
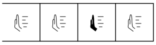
星状カットスロートの局面

および全微小版ショウブの局面



の直和は，どちらが勝つでしょうか．

解答

この章の結果から，の原子量は -2，の原子量は 2，そしての原子量は -2 となります．これらの原子量の和は -2 となるので，右が勝ちます．

6. 全微小版ランオーバー (ALL-SMALL RUN OVER) の局面において，次の式が成り立つことを示してください．

$$\bigcirc\bullet^{m} = .\underbrace{\bar{1}\bar{1}\cdots\bar{1}}_{n}*$$

ただし $n = \frac{1}{2}m(m-1)$ とします．

解答

より強い次の結果を示すほうが簡単です．X を，空きマスと黒駒からなる配置で，i 番目の黒駒は左端から a_i 番目のマスにあるとします．ここで，$n = \sum_j (a_j - 1)$ とします．これは，左がこの配置のなかで駒を移動させることのできる最大手数です．すると，次の式が成り立ちます．

$$\bigcirc X = .\underbrace{\bar{1}\bar{1}\cdots\bar{1}}_{n}*$$

ここで，左には劣位でない選択肢は二つしかないので，

$$\bigcirc X = \{0,\ .\underbrace{\bar{1}\bar{1}\cdots\bar{1}}_{n-1}* \,|\, 0\}$$

となり，練習問題 9.18 によって，これは $.\underbrace{\bar{1}\bar{1}\cdots\bar{1}}_{n}*$ に等しくなります．

7. 全微小版ドラッグオーバー (ALL-SMALL DRAG OVER) の局面において，次の式が成り立つことを示してください．

$$\bigcirc^{m}\bullet^{n} = .\underbrace{mm\cdots m}_{n-1}+m\cdot* = m\cdot(.\underbrace{11\cdots 1}_{n-1}*)$$

解答

$n = 1$ のときは，$\bigcirc^{m}\bullet = \left\{\bigcirc^{m-1}\bullet \,\middle|\, \bigcirc^{m-1}\bullet\right\}$ となり，これは m が偶

数ならば $\{0 \mid 0\} = *$ に等しく，m が奇数ならば $\{* \mid *\} = 0$ に等しくなります．

$n > 1$ のときは，

$$\begin{aligned}\bigcirc^m\bullet^n &= \{\bigcirc^{m-1}\bullet^n, \bigcirc^m\bullet^{n-1} \mid \bigcirc^{m-1}\bullet^n\} \\ &= \{(m-1)\cdot(.\underbrace{11\cdots1}_{n-1}*), m\cdot(.\underbrace{11\cdots1}_{n-2}*) \mid (m-1)\cdot(.\underbrace{11\cdots1}_{n-1}*)\} \\ &= \{A, B \mid A\}\end{aligned}$$

となります．ここで $D = m\cdot(.\underbrace{11\cdots1}_{n-1}*)$ として差分ゲーム $\{A, B \mid A\} - D$ を考えます．

$$D - A = .111\cdots1 \parallel 0$$
$$D - B = .000\cdots0 > 0$$

が成り立つので，この差分ゲームにおいて調べなければならないのは $-D$ に対する手だけです．練習問題 9.18（232 ページ）によって，どちらの対局者も $-D$ から

$$-(m-1)\cdot(.\underbrace{11\cdots1}_{n-1}*)$$

とする手を打つことができ，さらに右は

$$-(m-1)\cdot(.\underbrace{11\cdots1}_{n-1}*) - .\underbrace{11\cdots1}_{n-2}*$$

とする手を打つことができます．前者の結果は $-A$ に等しいので，先手番の対局者がこの手を打ったとすると，後手番の対局者は $\{A, B \mid A\}$ を A とします．右が後者の手を打ったとすると，左は $\{A, B \mid A\}$ を B とする手で応手して，$(m-1)\cdot .00\cdots01 > 0$ の形のゲームを残すことができるので，左には右の手に対して勝つための応手があります．

8. 非不偏版**フォークリフト**において，$(1, 1, \ldots, 1)$ の形の局面の値を求めてください．

解答

$n = 0$ のときは，練習問題 9.7（228 ページ）で求めました．$n > 0$ のときは，1 手ごとに山の数が一つずつ減っていきます．さらに，$a1b$ からは，後手

番の対局者は，そのあとでちょうど 2 手だけ打つことができてゲームの値が 0 となるように手を打つことができます．つまり，このゲームは

$$a\underbrace{11\cdots1}_{n}b = \begin{cases} 0 & (n\text{ が奇数のとき}) \\ * & (n\text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

となり，単に**愛してる？ 愛してない？**の装いを変えたゲームなのです．

9. **非不偏版エンドニム**において，一つの山 a の局面および二つの山 $b1$ の局面のそれぞれの値を求めてください．

解答

山が一つだけのときは，山が一つの**ニム**と同じなので，a の値は $*a$ となります．

主張：11 の値は 0 となり，$b > 1$ に対して $b1$ の値は $* + {\uparrow}{*b} = {\uparrow}{*}(b \oplus 1)$ となる．

これを帰納的に示します．ゲーム $b1$ は次の形をもちます．

$$\{*, 0, {\uparrow}{*3}, {\uparrow}{*2}, {\uparrow}{*5}, {\uparrow}{*4}, \ldots \mid *b\}$$

ここで実際の左選択肢は，前記の並びの最初の b 個のゲームとなります．補題 9.5 の図およびその証明（227 ページ）と同様に，左選択肢は打ち消されて $*m'$ の形のゲームとなり，これは最終的には打ち消されて 0 となります．すると，補題 9.5 より，$b > 1$ に対して $b1$ の値は $\{0 \mid *b\} = {\uparrow}{*}(b \oplus 1)$ となります．

10. 定理 9.15（231 ページ）を証明してください．

解答

最後の構成要素 G^n に対して手を打ち，直和としてある $G^R \in \mathcal{G}^R$ を残すのが，右にとって優位な手となります．G^R とする手が打消し可能であれば，$.\underbrace{11\cdots1}_{n} \geq G$ となるので，その手は G においても打消し可能となります．最後の構成要素 G^n を 0 とする手で $.\underbrace{11\cdots1}_{n-1}$ を残すのが，左にとって優位な手となりますが，これは帰納法により右選択肢 $\mathcal{G}^R$ をもちます．この手が $\mathcal{G}^R$ に含まれるどの手でも打ち消せないことは，$G^R - .\underbrace{11\cdots1}_{n}$ において，左が

$-G^n$ に対する手を打って 0 として勝てることから確かめられます．

11. 系 9.17（232 ページ）を証明してください．証明が複雑になりすぎるようであれば，.11214 を例として証明の概要を示すのでもかまいません．

解答

$S = .i_1 i_2 i_3 \cdots i_n$ において，右は $\uparrow^n$ に対して手を打ち，$.j_1 j_2 j_3 \cdots j_n$ を残すのが優位な選択肢です．定理 9.16 を繰り返し使うと，すべての左選択肢は最も右側にある i_k に対する右の手で打ち消され，最終的にはすべての左選択肢は打ち消されて 0 となるか，または打ち消しきられてなくなります．言い換えると，右はつねに手を打つことのできる最も右側の i_k に対して手を打つことで，対局者が交互に手を打つことによって得られるすべての $S^{LRLR\cdots R}$ は S より小さくなり打ち消されます．

12. $X = \underbrace{11\cdots1}_{i}0Y$ を 0 と 1 からなる並びとし，k を正の整数とします．$\uparrow$ を底とする昇進記法（またはそれに $*$ を加えたもの）を使って，次のそれぞれのゲームを表記してください．

(a) $\{0,\, .X* \mid 0\}$
(b) $\{0,\, .X\bar{k}* \,\big|\, 0\}$

これらは，練習問題 9.18 を一般化したものです．

解答

(a) $\{0,\, .X* \mid 0\} = .\underbrace{11\cdots1}_{i+1}*$ となることを，これらの差分ゲームが後手必勝となることで示します．$.\underbrace{11\cdots1}_{i+1}*$ は，0 と比較不能で，$.X*$ より大きいので，この差分において，$.\underbrace{11\cdots1}_{i+1}*$ に対する手だけを考えればよいことになります．左が先手番のときには，

$$.\underbrace{11\cdots1}_{i+1}* + \{0 \,\big|\, 0,\, .\bar{X}*\} \xrightarrow{\text{左}} .\underbrace{11\cdots1}_{i}* + \{0 \,\big|\, 0,\, .\bar{X}*\}$$
$$\xrightarrow{\text{右}} .\underbrace{11\cdots1}_{i}* + .\bar{X}* < 0$$

または

$$.\underbrace{11\cdots1}_{i+1}*+\{0\mid 0,\ .\bar{X}*\}\xrightarrow{\text{左}}.\underbrace{11\cdots1}_{i+1}+\{0\mid 0,\ .\bar{X}*\}$$

$$\xrightarrow{\text{左}}*+\{0\mid 0,\ .\bar{X}*\}$$

となり，そこから左によい手はありません．

右が先手番のときには，

$$.\underbrace{11\cdots1}_{i+1}*+\{0\mid 0,\ .\bar{X}*\}\xrightarrow{\text{右}}.\underbrace{11\cdots1}_{i+1}+\{0\mid 0,\ .\bar{X}*\}\xrightarrow{\text{左}}.\underbrace{11\cdots1}_{i+1}>0$$

または

$$.\underbrace{11\cdots1}_{i+1}*+\{0\mid 0,\ .\bar{X}*\}\xrightarrow{\text{右}}0+\{0\mid 0,\ .\bar{X}*\}\xrightarrow{\text{左}}0$$

となります．

(b) X が 0 を含めば，前項の結果がそのまま使えます．$X=.\underbrace{11\cdots1}_{n}$ ならば，同様にして $\{0,\ .\underbrace{11\cdots1}_{n}\bar{k}*\,|\,0\}=.\underbrace{11\cdots1}_{n}$ を証明することができます．

13. 標準形が全微小でないゲームは，どんな全微小ゲームとも等しくならないことを証明してください．（ヒント：G が全微小ゲームならば，G を標準形にしても全微小ゲームとなることを証明してください．）

解答

G を全微小ゲームとします．劣位な選択肢を除いても，G は全微小ゲームのままです．打消し可能性によって全微小でなくなるとすれば，それは一方の選択肢が完全に打ち消しきられる場合です．つまり，G のある局面 H に対して，$H^{RL}\geq H$ となり，H^{RL} は右選択肢をもたない場合です．（打消し可能な選択肢を短絡すると，H には，右選択肢がなくなり左選択肢が残っているという状況です．）しかし G は全微小なので，$H^{RL}=0$ となり，$H\leq H^{RL}=0$ が成り立ちます．つまり，$H=0$ で選択肢がまったくないか，または $H<0$ で H には右選択肢が残っていることになります．

14. 定理 9.20 を証明してください．

解答

$i,j>0$ に対して，

 $^{i}_{j} - .\underbrace{jjj\cdots j}_{i} + *$

は次に示すとおり，後手番の対局者の勝ちとなります．

- 左の最初の構成要素を  $^{i}_{j-1}$ とする手には，右は 2 番目の構成要素の $\uparrow^n$ を

$$-.\underbrace{(j-1)(j-1)(j-1)\cdots(j-1)}_{i}$$

  とする手で応手します．
- 右の最初の構成要素  $^{i-1}_{j}$ とする手には，左は 2 番目の構成要素の $\uparrow^n$ を $-.\underbrace{jjj\cdots j}_{i-1}$ とする手で応手します．
- $i=j=1$ のときを除いて，そのほかの手はすべて劣位な選択肢となります．

$i=j=1$ のときを個別に調べると， $=\{0,*\mid 0\}=\uparrow *$ となります． $^{0}_{j}$ はお決まりの手順で調べることができて，標準形となります．

15. 分岐のないグラフで対局する**カットスロート**について，次のそれぞれの等式が成り立つことを示してください．

(a) $RL^n = .\underbrace{11\cdots 1}_{n-1}*$

(b) $LRL^n = .\underbrace{00\cdots 0}_{n-1}\bar{1}$

解答

(a) $n=1$ のときは $RL=*$ となります．$n>1$ のときは，

$$\begin{aligned} RL^n &= \left\{0, RL, RL^2, \ldots, RL^{n-1} \;\middle|\; 0\right\} \\ &= \{0,\ .\underbrace{11\cdots 1}_{n-2}*\mid 0\} \\ &= .\underbrace{11\cdots 1}_{n-1}* \text{ (練習問題 9.18 より)} \end{aligned}$$

(b) $n=0$ のときは $LR=*$ となり，$n=1$ のときは $LRL=.\bar{1}$ となります．$n>1$ のときは，劣位な選択肢を除くと，

$LRL^n = \{.\underbrace{11\cdots1}_{n-1}*\,|\,0\} = .\underbrace{00\cdots0}_{n-1}\bar{1}$ となります．右側の等号は，差分ゲーム $\{.\underbrace{11\cdots1}_{n-1}*\,|\,0\} + .\underbrace{00\cdots0}_{n-1}1$ の対局で示すことができます．定理 9.15 によって，この差分ゲームにおいて左は先手番で最初の構成要素に手を打って正のゲームとすることができます．右が先手番で最初の構成要素に手を打っても正のゲームとなります．右の最善の第 1 手は，2 番目の構成要素を $\{.\underbrace{11\cdots1}_{n-1}*\,|\,0\} + .\underbrace{\bar{1}\bar{1}\cdots\bar{1}}_{n-1}*$ とすることで，左は最初の構成要素に手を打って勝つことができます．

16. すべての非負整数 j および k に対して，次の各項が成り立つことを示して，$\{0\,|\,*,*2\}$ は（$\uparrow$ を底とする）昇進記法とニム数の和として表せないことを示してください．

(a) $\{0\,|\,*,*2\} \mathrel{|\!\!>} .0k + *j$

(b) $\{0\,|\,*,*2\} \mathrel{<\!\!|} .1\bar{k} + *j$

解答

(a) 差分ゲーム $\{0\,|\,*,*2\} + .0\bar{k} + *j$ を考えます．j および k がともに 0 ならば，$\{0\,|\,*,*2\} > 0$ となります．$k = 0$ および $j > 0$ ならば，左は $*j$ を 0 にする手で勝つことができます．それ以外のときは，左は

$$\{0\,|\,*,*2\} + .0\bar{k} + *j \xrightarrow{\text{左}} \{0\,|\,*,*2\} + .1(\overline{k-1}) + *j$$

として，原子量が 2 の局面にすることができます．（$\mathrm{AW}(\{0\,|\,*,*2\}) = \mathrm{AW}(.1(\overline{k-1})) = 1$ および $\mathrm{AW}(*j) = 0$ となることに注意してください．）これらより，$\{0\,|\,*,*2\} + .0\bar{k} + *j \mathrel{|\!\!>} 0$ が成り立ちます．

(b) 差分ゲーム $\{0\,|\,*,*2\} + .\bar{1}k + *j$ を考えます．$k = 0$ ならば，右はある $p \neq 1$ について $\downarrow *p$ とする手で，それ以外のときは，

$$\{0\,|\,*,*2\} + .\bar{1}k + *j \xrightarrow{\text{左}} \{0\,|\,*,*2\} + .\bar{2}(k-1) + *(j \oplus 1)$$

とする手で勝つことができます．ここで，左は，右が原子量 2 の局面とするのを防ぐために，$\{0\,|\,*,*2\} + .\bar{1}(k-1) + *j$ とする手を打たなければなりません．しかし，これは帰納法より $\mathrel{<\!\!|} 0$ となります．これらより，$\{0\,|\,*,*2\} + .\bar{1}k + *j \mathrel{<\!\!|} 0$ が成り立ちます．

17. 次の**全微小版貨物列車** (ALL-SMALL BOXCARS) のそれぞれの局面の値を昇進記法で求めてください．

(a) ●□○ $= *$
(b) ●□●□○ $= .1$
(c) ●□●□●□○ $= .2*$
(d) ●□●□●□●□○ $= .31$

解答

まず，盤の端のマスにある駒がいったん動いたら，それによって空いたマスは二度と使われることはなく，そのマスはないものと考えてよいことがわかります．また，どんなに長い列車も 1 台の貨車として扱ってよいことがわかります．最初の二つの局面は，直接的に値を求めることができます．

(a) ●□○ $= \{0 \mid 0\}$
(b) ●□●□○ $= \{0, * \mid *\} = \{0 \mid *\} = \uparrow = .1$

●□□●□○ $= \{\uparrow, 0 \mid 0\} = *$ より

●□●□●□○ $= \{$ ●□●□○, ●□□●□○, $0 \mid$ ●□●□○ $\}$
$= \{\uparrow, * \mid \uparrow\} = \Uparrow * = .2*$

となります．また

●□□●□●□○ $= \{\Uparrow *, \uparrow \mid *\} = \{\uparrow \mid *\} = .11$

および

●□●□□●□○ $= \{0, .11, * \mid \Uparrow *\} = 3 \cdot \uparrow$

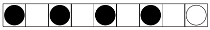
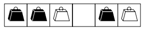
より

●□●□●□●□○
$= \{$ ●□●□●□○, ●□□●□●□○, ●□●□□●□○, $0 \mid$ ●□●□●□○ $\}$
$= \{.2*, .11, .3, 0 \mid .2*\} = \{.3 \mid .2*\} = .31$

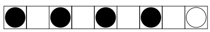
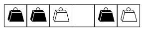
となります．

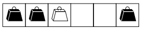
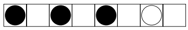
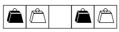
18. 次の**全微小版貨物列車**，**クロバー**および**星状カットスロート**の局面の直和で，

左に勝つことのできる手はあるでしょうか．それとも，右に勝つことのできる手はあるでしょうか．

 $+$  $+$ 

解答

昇進記法を使うと， $= .31$， $= .1*$，そして  $= .\bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{3}$ となり，これらの和は $.1\bar{2}\bar{3}\bar{3} + *$ です．これは 0 と比較不能なので，先手番の対局者の勝ちとなります．

左が勝つためには， を  $= .\bar{2}\bar{2}\bar{2}\bar{2}$ とする手で直和を $.2\bar{1}\bar{2}\bar{2} + * > 0$ とするか，または  $= .1$ とする手で直和を $.1\bar{2}\bar{3}\bar{3} > 0$ とすることです．右が勝つためには， $= .2 + *$ とする手で直和を $.0\bar{3}\bar{3}\bar{3} < 0$ とするか，または  $= 0$ とする手で直和を $.0\bar{2}\bar{3}\bar{3}$ とすることです．

付録 A

1. 形式的には，降下型帰納法の原理は次のように述べることができます．領域 U は半順序をもつ集合で，U のすべての空でない部分集合は少なくとも一つの極小元をもつとする．このとき，

$$\forall n : [\forall m < n : P(m)] \;\Rightarrow\; P(n)$$

が成り立つならば

$$\forall n : P(n)$$

が成り立つ．（この問題からはあきらかではありませんが，n が極小元ならば，$\forall m < n : P(m)$ は無条件に成り立ちます．通常，これを**基礎となる場合**といいます．）

背理法を使って，降下型帰納法の原理を証明してください．（**ヒント：** $T = \{n : \mathrm{P(n)}$ は偽 $\}$ として，$T = \emptyset$ となることを証明します．）

解答

$$\forall n : [\forall m < n : P(m)] \;\Rightarrow\; P(n)$$

を仮定し，$F = \{n : \mathrm{P(n)}$ は偽 $\}$ とします．$F \subseteq U$ なので，F が空でないならば，F は極小元をもちます．その極小元の一つを n とします．n は，F の極小元なので，すべての $m < n$ に対して $P(m)$ は真となります．すると仮定により，$P(n)$ は真となります．これは，$n \in F$ という事実に反します．つまり，F は空集合となります．これより，$\forall n : P(n)$ が成り立ちます．

2. 「U のすべての空でない部分集合は，少なくとも一つの極小元をもつ」という前提が重要であることを見るために，すべての実数 $x \in [0, 1]$ に対して $x = 0$ が成り立つという命題は，前述の帰納法の条件を満たしていることを確かめてください．しかし，もちろん $[0, 1]$ に含まれるすべての実数に対してはこの命題は正しくありません．言い換えると，

   (a) 降下型帰納法を使って，すべての $0 \leq x \leq 1$ に対して，$x = 0$ が証明できているように見せてください．

   (b) 具体的な反例を挙げて，$[0, 1]$ に含まれる実数の部分集合すべてが極小元

をもつわけではないことを示してください．

解答

x は $\frac{x}{2}$ の 2 倍と書くことができます．$\frac{x}{2} < x$ が成り立つので，帰納法により $\frac{x}{2} = 0$ と仮定すると，$2 \cdot (\frac{x}{2}) = 2 \cdot 0 = 0$ となります．例外扱いとなる $x = 0$ の場合は，x が 0 となるのは自明です．

しかしながら，$[0, 1]$ に含まれる実数の部分集合すべてが極小元をもつわけではありません．たとえば，集合 $\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$ には極小元はありません．

3. n 角形の任意の三角形分割によって得られる三角形は $n-2$ 個となることを証明してください．これによって例 A.8 の（正しい）証明が完成します．

解答

できるだけ証明をさぼりたいのであれば，分割によって得られる三角形の内角の和は $(n-2) \cdot 180$ となることはすでに証明しているので，三角形は $n-2$ 個でなければならないといえます．

あるいは，n 角形を対角線によって二つに分割したとき，得られる多角形の辺数をそれぞれ a および b とします．この対角線によって新たに 2 本の辺が追加されるので，$a + b = n + 2$ が成り立ちます．帰納法により，この二つの多角形を三角形分割すると，それぞれ $a-2$ 個および $b-2$ 個の三角形が得られるので，合計で $a + b - 2 - 2 = n - 2$ 個の三角形が得られます．例外扱いとなる $n = 3$ の場合は，$n - 2 = 1$ 個の三角形です．

4. 補題 A.11 を証明して，**ピックの定理**の証明を完成させてください．

解答

補題 A.11 のすぐ後の文で言及したように，ピックの公式が加法的，すなわち

$$\left(\frac{p_1}{2} + q_1 - 1\right) + \left(\frac{p_2}{2} + q_2 - 1\right) = \frac{p}{2} + q - 1$$

となることを示せば十分です．n を P_1 と P_2 を分割する線分上の格子点の個数とします．（線分の端点は格子点となるので，$n \geq 2$ となります．）これら n 個の格子点は，P_1 および P_2 の境界上にあります．しかし，この線分の端点だけが P の境界上にあるので，

$$p_1 + p_2 = p + 2(n-2) + 2$$

が成り立ちます．P の内部にある格子点は，P_1 および P_2 の内部にある格子点に加えて，新たに加えた線分上の端点を除いた $n-2$ 個の点となります．つまり

$$q_1 + q_2 + n - 2 = q$$

が成り立ちます．これらを用いると

$$\begin{aligned}\left(\frac{p_1}{2} + q_1 - 1\right) + \left(\frac{p_2}{2} + q_2 - 1\right) &= \left(\frac{p_1}{2} + \frac{p_2}{2}\right) + (q_1 - q_2 - 2) \\ &= \left(\frac{p}{2} + (n-2) + 1\right) + (q - n) \\ &= \frac{p}{2} + q - 1\end{aligned}$$

となります．

5. 0 と 1 の間にある任意の有理数は，分子が 1 の相異なる分数の和として書けることを証明してください．たとえば，$\frac{7}{11} = \frac{1}{2} + \frac{1}{11} + \frac{1}{22}$ のようになります．

解答

有理数を $\frac{p}{q}$ とし，n を $\frac{1}{n} < \frac{p}{q} < \frac{1}{n-1}$ を満たすように選びます．（すなわち，$\frac{p}{q}$ を超えない範囲でできるだけ大きく $\frac{1}{n}$ をとります．）

$$\frac{p}{q} - \frac{1}{n} = \frac{np - q}{qn}$$

ここで，$\frac{p}{q} < \frac{1}{n-1}$ より $p(n-1) < q$ となるので，$np - q < p$ が成り立ちます．つまり，右辺の分子は元の分数の分子より小さくなるので，帰納法により $\frac{np-q}{qn}$ を分子が 1 の相異なる分数の和として表すことができます．さらに，この和を構成するそれぞれの分数は $\frac{1}{n}$ よりも小さくなります．（そうでなければ，分数の和は $\frac{2}{n} > \frac{p}{q}$ よりも大きくなってしまいます．）これで，$\frac{p}{q}$ が相異なる分数に分解できることが示せました．

6. n **個の相加平均と相乗平均の不等式**，つまり，n 個の非負の数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ に対して

$$\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

が成り立つことを証明してください．$P(n)$ を，正整数 n に対してこの不等

式が成り立つという命題とします．

(a) 手始めに，$P(1)$ および $P(2)$ を証明してください．

(b) $n = 2m$ のとき，$P(m)$ ならば $P(n)$ となることを証明してください．

(c) $P(n+1)$ ならば $P(n)$ となることを証明してください．（これは**逆向き**の帰納法です．）（**ヒント**：$a_1, a_2, \ldots, a_n$ の平均値を a_{n+1} として追加してください．この平均は，相加平均または相乗平均のどちらでもかまいません．）

(d) すべての n に対してこの不等式が成り立つことを証明するのに，帰納法をどのように用いたかを説明してください．

解答

(a) $P(1)$ は自明です．なぜなら，$\frac{a_1}{1} \geq \sqrt[1]{a_1}$ となるからです．
$P(2)$ は次のとおりです．

$$\begin{aligned}(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0 \;\; &\Rightarrow \;\; a_1 - 2\sqrt{a_1}\sqrt{a_2} + a_2 \geq 0 \\ &\Rightarrow \;\; \frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\tfrac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) &= \tfrac{1}{2m}(a_1 + \cdots + a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{2m}) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{m}(a_1 + \cdots + a_m) + \tfrac{1}{m}(a_{m+1} + \cdots + a_{2m})\right) \\ &\geq \tfrac{1}{2}\left(\sqrt[m]{a_1 \cdots a_m} + \sqrt[m]{a_{m+1} \cdots a_{2m}}\right) \quad (\text{帰納法により}) \\ &\geq \sqrt{\sqrt[m]{a_1 \cdots a_m}\,\sqrt[m]{a_{m+1} \cdots a_{2m}}} \quad （P(2)\text{ より}） \\ &= \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}\end{aligned}$$

(c) $a_{n+1} = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ とします．$P(n+1)$ を仮定すると

$$\frac{1}{n+1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1}) \geq \sqrt[n+1]{a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1}}$$

が成り立ち，両辺を $n+1$ 乗すると，右辺は $a_1 a_2 \cdots a_n$ となります．左辺は

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{n+1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1})\right)^{n+1} \\ &= \left(\frac{n}{n+1}\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1})\right)^{n+1} \\ &= \left(\frac{n}{n+1}\left(a_{n+1} + \frac{a_{n+1}}{n}\right)\right)^{n+1}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (a_{n+1})^{n+1} \\
&= a_{n+1}\left(\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\right)^n
\end{aligned}
$$

となります．つまり

$$
a_{n+1}\left(\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\right)^n \geq a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1}
$$

が得られ，両辺を a_{n+1} で割って n 乗根をとると，$P(n)$ が示せました．

(d) $P(n+1) \Rightarrow P(n)$ を繰り返し使って，左辺を $P(2^i)$ の形にします．そして，$P(n) \Rightarrow P(2n)$ を繰り返し使って，左辺を $P(2)$ にします．たとえば，$P(6)$ を証明するのは，次のとおりです．

$$
P(2) \Rightarrow P(4) \Rightarrow P(8) \Rightarrow P(7) \Rightarrow P(6)
$$

より形式的には，m および n をそれぞれ 2 進展開したときに，m が n よりも桁数が小さいか，または m が n と同じ桁数で $m > n$ となるときに，$m \leq n$ とする半順序を考えます．この半順序の下で，任意の整数の集合は極小元をもち，その極小元はその集合のなかの最小の桁数の数のなかで最大のものとなります．そうすると，帰納法を使うことができます．