はじめに

直線や曲線については，ほとんどの人が明確なイメージ，概念をもっているであろう．これらの概念をもとに，図形の連結性を定義し，図形に関してある程度厳密な議論ができるようにする．さらに，伸縮変形，切り貼りなどの直観的操作を用いて，いわゆるゴム紐，ゴム膜の幾何学と呼ばれるトポロジーを展開する．開集合や閉集合，近傍，位相，コンパクトなどの位相空間論の用語は用いない．本書のゴールは閉曲面の分類である．

曲面についても，各人，それなりのイメージをもっていると思うが，この本では閉曲面を構成するという視点から，設計図の概念を通して閉曲面を定義する．トーラス，メビウスの帯，クラインの壺など，イメージをつかみやすい図形が登場する．閉曲面の設計図と，閉曲面上に描いたグラフは議論を展開する上で重要な役割を果たす．

第１章では，曲線の概念，伸縮変形，切り貼りなどの具体的な操作を元に，同相変形と同相写像の概念を導入する．いくつかのパズル的な問題も扱われる．第２章では，ジョルダンの曲線定理を明らかな事実として認め，平面上に描くことができるグラフ，および連結平面グラフに関するオイラーの公式を導入し，これを証明する．

第３章では閉曲面を扱うため，４次元（および高次元）空間が導

入される．平面と3次元空間の関係から，高次元空間に関する類推も容易にできるであろう．第4章は閉曲面のオイラー標数の話である．閉曲面を多辺形に分割するようなセル分割グラフにおいて，「頂点数 − 辺数 + 領域数」は，セル分割グラフの選び方によらず，閉曲面によって決まることを示す．この値は閉曲面のオイラー標数と呼ばれている．同相な閉曲面どうしは同じオイラー標数をもつ．

第5章は，閉曲面の連結和の話である．連結和によって，新しい閉曲面が次々構成される．また，複雑な閉曲面はより単純な閉曲面の連結和に分解できることを示す．第6章では閉曲面の分類を行う．球面以外の閉曲面は，いくつかのトーラスの連結和であるか，または，いくつかの射影平面の連結和であることが示される．証明には，連結和分解を用いる．

第7章では，閉曲面が思いがけないところに現れるということを示すため，辺の長さが指定された平面上の5辺形（閉折線も含む）の形の集合について考える．このような5辺形の形は6個の実数で記述することができ，形全体の集合は6次元空間内の図形で表される．具体的な例として，5辺の長さが1, 2, 3, 4, 5の5辺形の形全体の集合（= 6次元空間内の図形）が，ダブルトーラスと呼ばれる閉曲面と同相になることを示す．

面倒な計算をせずに，図を頼りに議論を展開していくことだけで，いろいろなことが判明していく．きっと楽しみながら読んでもらえることと思う．

最後に，この本の出版にあたって，いろいろとお世話になった野口訓子さん，大谷早紀さんに感謝します．

2013年7月

前原　潤・桑田孝泰