

序

微分積分学とは何か

読者の諸君は、高校で、微分と積分を学んだはずである。しかし、多くの教科書では、「微分と積分はどこでどう使われるのか」という本質的なことはあまり議論されておらず、また授業時間の不足から計算テクニックの習得で終わってしまうことも多いようだ。残念な結果である。「微分とは、接線の傾きを求めること」「積分とは、微分の逆」というような程度の理解の仕方では、本質を得ず、実にもったいない成果でしかない。

微分は「微妙に分かる」
積分は「分かった積もり」
というジョークが昔あった。

結論から述べておこう。

微分積分学は、ものごとの変化を解析する学問である。

自然界にはいろいろな現象があるが、すべて「小さな変化」の積み重ねで表現できると考えられる。その「小さな変化」を取り扱うのが微分・積分である。面積や体積を計算するのも、速度や加速度を計算するのも、結局は、小さな小さな量で計算することを繰り返せば、すべての量が計算できる、というのが微分積分を貫くポリシーである。そして微小量を計算しているはずが、いつのまにかグラフ全体を概観できるツールになっていたりと、全体の総計を知ることができたりする。

学問は、その必要性があって発展を続けている。微分や積分が発明されたのは、自然を理解しようとする試み、今日の「物理」からだった。

微積は、局所 (local) から大域的 (global) な情報を得るツールである。

「小さな変化がどうなっているのか」という学問で、自然界のすべてが制覇できるのだ。

微分積分は、自然を理解する第1歩となる道具である。人類が発明したこの便利な道具を君も使いこなしてみたくなっただろうか。

数学という学問について

理数系の学問は、積み重ねの学問だ。山登りのようである。どこかでつまずくと先へ進めず、登頂を断念せざるを得なくなることもある。

おおまかに、高校数学から大学での数学・および応用される分野への関連図を描くと、下の図のようになる。本書の「微分・積分」が今後の応用において、とても重要な位置にあることがわかってもらえるだろう。読者諸君が微積を学ぼうとする動機はさまざまだと思うが、どの分野に進むにしても、これだけは必要、という内容を本書には収めたつもりである。

数学を大きく「代数学」「幾何学」「解析学」の3つに分けていたのは昔の話。今では、各方面の研究が相互に進展して、分野に分けることが難しくなっている。

あえて分けるなら、**純粋数学**と**応用数学**の2つ。

純粋数学

(pure mathematics)

伝統的な数学に抽象概念をいれた学問。

代数学 (algebra)

整数論、方程式や演算のもつ集合の構造 (群・環・体) など。

幾何学 (geometry)

図形に由来するもの。コーヒークップとドーナツは同じ構造とする位相幾何学 (トポロジー) など。

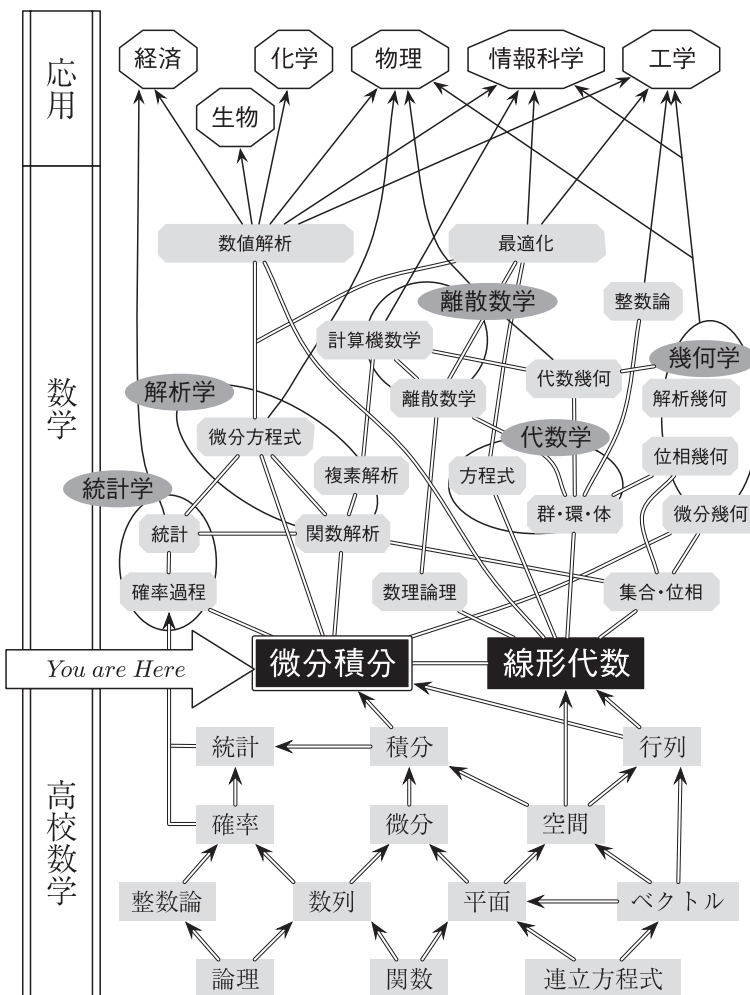
解析学 (analysis)

微分積分、微分方程式、確率論、統計学など。

応用数学

(applied mathematics)

計算機・情報理論、符号理論、暗号理論など情報や通信に関連したもの、シミュレーション技術、最適化数学、経済学、生物学への応用なども含まれる。



高校から大学・応用に至るまでの数学の流れ

本書について

山登りにはトレーニングも必要だが、先が見えずにひたすら計算練習のトレーニングを繰り返すのもつらいものだ。本書では、「いま説明したことが、どこでどう使われるのか」という点にこだわって、たくさんコメントを入れてある。おせっかいかもしれないが、難易度の表示も入れておいた。また、関連する公式や説明箇所に戻ったり、進んだりできるようにコメントしてある。あちこちのページに飛びながら、どん欲に「学問する」姿勢をもってほしい。

本書は、微分積分を駆使して、読者が自ら問題を設定して解決できるように、という願いを込めて執筆した。

以下、いくつかの特徴を。

- 本書は、筆者の情報科学部における講義「微積分学」(大学1年生前期科目)のテキストとして執筆した。
- 基礎知識の確認の意味で、「第0章 準備」の章を用意した。これは、昨今の大学入試が多様化し、新入学生の数学レベルに差があることに対応するためである。新入生の講義では「第0章」の内容は既知として講義を始めたい。基礎知識に不安がある読者は、まず第0章の理解を目標にしてほしい。第0章では高校で学ぶ内容だけではなく、量化記号の紹介や双曲線関数の定義など、事前に知っていた方がよいと思われる内容も含めてある。
- 定義や公式などには、それぞれ重要度を示す意味で、【Level 1】【Level 2】…等の注釈を入れた。
【Level 0】はBasicレベル、多くは高校数学レベルである。
【Level 1】はStandardレベル。本講義で伝えたい重要なもの。
【Level 2】はAdvancedレベル。ちょっと数行計算すれば得られる公式である。ややハイレベルなものも【Level 2】としているので、初学の際には飛ばしても構わない。
- 第2章から、数列・極限、1変数の微分・積分を説明した後、第4章ではパラメータ(媒介変数)を用いた曲線についてまとめる章を設けた。多くの教科書では、微分や積分の話題や応用としてあちこちに分散して登場しているが、本書ではこれを一括してまとめてある。
- 第5章で多変数関数の微分・積分である偏微分と重積分の説明を簡単に行った。第5章は、紙数の制限もあって、急ぎ足で書いた。将来必要となるポイントには触れているつもりだが、証明などを省いた箇所もある。
- 大学の新生が微積分を応用するのは、おそらく物理学であろう。第6章は、物理・力学への応用として、運動方程式の積分による保存則の導出や惑星の楕円軌道など、応用・発展的な例

こうした工夫は、筆者が「せっかち」だからかもしれない。筆者は数学ではなく物理を専門としていて、微分積分を「使う」立場である。いつも必要に迫られてから、数学を最小限の知識で運用しようとするからか、自分で使って便利な本が欲しいと感じていた。

実は本書のタイトルとして当初考えていたのは『物理学者が書いたひとつ多量の微積分—学び直しから発展まで—』だった。長すぎて教科書に採用されにくいという共立出版さんのご意見に従って短くなった。

【Level 3】という筆者の趣味に近いページもある。定理や公式でアミ掛けしたものは必須レベルである。

をいくつか紹介した。いずれも大学初年度に物理の授業として触れられる内容かもしれない。微積分の延長として興味をもって読んでいただければ幸いである。

- 例題・類題・章末問題は、解けたらオモシロイと思ってもらえるような、具体的な問題を多く含むことを心がけた。計算練習レベルの問題は、必要に応じて他の演習書で補っていただきたい。
- (完全ではないが) なるべく見開きで1つのテーマが収まるようにレイアウトを工夫した。

多くの教科書では、「微分方程式」や「級数」についても独立した章を設けて説明しているが、本書では触れていない。ときおり挿入したコラムで、雰囲気を感じてもらい、興味をもってもらえたら幸いである。

例えば、収束や連続についての ϵ - δ 論法を展開していない、とか、積分領域の境界では積分値がゼロ (測度がゼロ) であることを説明していない、など。

本書では微分積分を実用的に応用することを最優先にした。したがって、厳密ではない記述もあり、数学を専門とする方からは違和感を感じるというご意見もいただいた。しかし、筆者は数学は使うためにあると考えている。公式を導いた先にどんな応用が待っているのかを「わくわく」しながら、山を登りきってほしい。

謝辞

原稿段階でご意見をくださった大阪工業大学の数学担当の各氏に感謝いたします。特に、桑子和幸氏、斎文章氏からは多くのご指摘やご意見をいただきました¹⁾。一森哲男氏、斎藤隆氏、谷川明夫氏からは出版に関する助言もいただき、参考にさせていただきました。また、本書の作成にあたり大変お世話になりました共立出版 (株) の寿日出男氏、および赤城圭さんに厚くお礼申し上げます。執筆に費やした4ヶ月間、協力(?)を惜しまなかった妻の理香にも最後に感謝の言葉を添えます。

2008年12月

著者

改訂版への序

幸い、本書も毎年版を重ねてきたが、初版より5年を迎えるにあたり、計算問題を拡充した改訂版を出すことになった。本書を教科書として利用していただいている桑子和幸氏、尾形尚子氏からのご意見も取り入れ、各所で説明も追加した。長く読者に利用されることを願う。

2013年9月

著者

1) 出版後、本書中のミスなどが判明した場合、筆者のウェブページ

<http://www.is.oit.ac.jp/~shinkai/book>

で迅速に対応する予定です。