

はじめに

19世紀に発達した1変数複素関数論は数学の様々な分野において極めて重要な役割を果たしてきた。現在もその重要性はまったく変わらず、将来にわたってもそうであろう。数学を志すものにとって1変数複素関数論は必須であるといえよう。

一方、重要な1変数複素関数の様々な性質は、多変数複素関数についてはどうなっているであろうか、あるいはどう拡張できるであろうかとの興味も当然起こった（以後、本書では多変数複素関数のことを多変数関数と呼ぶことにする）。そこで、研究を始めてみると、1変数関数については生じなかったが、多変数関数について初めて生じる様々な特有の現象が19世紀末から20世紀初頭にかけて発見されたのである。多変数関数論の萌芽といえる。基礎的で比較的容易な理論は早い時期に構築されたが、いくつかの重要で極めて困難な問題はその研究上に残されたままになっていた。

20世紀中頃にこれらの重要な未解決問題を解決したのが日本人数学者の岡潔である。岡潔は未解決問題を解決したばかりでなく、多変数関数論の新しい理論（層の理論と呼ばれる）も築き上げた。それは現代数学の他の分野にも多大な影響を及ぼしている。

20世紀には代数幾何学、偏微分方程式論、特異点論、解析的整数論等数学の種々の分野において多変数化が行われ、多変数関数論は様々な分野で重要な役割を果たしている。そして数学を学ぶ上で

多変数関数の基礎知識が必要とされるようになっている。

本書は、多変数関数論の基礎知識を学びたいと思う人々、しかし必ずしも多変数関数論を専門とはしない人々に向けて、多変数関数論の基礎を紹介した入門書である。内容も、どの分野の人にも知っておいて欲しいものに限ってある。もちろん、多変数関数論それ自体の魅力に引かれて多変数関数論を学ぼうとする人にとってもしっかりした基礎を身に付けるのに役立つことと信じる。

本書を読むための基礎知識として、通常学部で講義されている複素関数論の基礎（コーシーの積分公式、留数定理等）は仮定した。それ以上の1変数関数論の部分は必要に応じて補ったので、特に深い知識は必要としない。また、多変数関数論は1変数関数論が元になっているので、関連する1変数関数論に関する部分は復習をしながら繋がり良く学べるようにした。

多変数関数論が初心者にとって難しく感じられる理由は主に2つあると思われる。1つは、変数が多くなったために生じる複雑さによる。2つには、1変数関数では生じなかったが多変数関数になって初めて生じる現象があり、そこから来る本質的な難しさである。本書ではこれらを乗り越えるために、第1の点に対しては、多くの図を取り入れて、直感的に内容を把握しやすくなるようにした。第2の点に対しては、単純だが本質的な現象に限って述べ、多変数関数特有の現象を理解できるようにした。全体の内容も最も基本的なものに限り、できるだけわかりやすく述べるように心がけたつもりである。定理や命題の内容の意味や背景が理解できるように述べることを心がけた。その上で、証明は、代数的なものについては引用に留めたものも多いが、解析的なものについてはできるだけ付けることにした。数学を学ぶ上では、その内容を理解することが最も大切であり、それができれば十分ともいえるが、証明が理解の助けになることもあると思うからである。

本書の内容は、導入部として、1変数関数論のほぼそのままの括

張に当たる部分を紹介した後、多変数関数論の基礎として、変数が多くなったために複雑になっている正則関数環、解析的集合および有理型関数の局所理論を紹介し、さらに多変数関数独特の現象である正則関数の接続および正則領域の理論を紹介した。なお、解析学では微分積分は基本であるので、様々な分野での応用を考慮して、最後の章は微分形式と積分に当て、合成留形式定理迄述べた。

多くの人に、本書を通して多変数関数論とはどんなものであるかを幾分でも理解してもらえ、応用に役立ててもらえれば、著者にとって望外の喜びである。

2012年度前学期に著者は早稲田大学理工学術院の4年生と大学院生の合併授業において、多変数関数論の講義を行った。本書は、その際に配布した事前資料が元になっている。第1章から第6章まではほぼ説明できたが、時間の都合上、一部分の証明は概略説明のみで、詳しくは資料参照に委ねた。第7章は授業では行えなかった。熱心に聴いてくれて、章末の問題をレポートとして提出し、種々の質問をしてくれた学生諸君に感謝します。また、本書の原稿を丁寧に読んで種々の貴重な指摘を下された加藤昌英氏に心から感謝致します。本シリーズ「数学のかんどころ」の一冊に本書を加えて著者にその執筆を勧めて下さり、本書出版の貴重な機会を与えて下さった飯高茂氏には衷心から感謝致します。

2013年11月

若林 功



岡潔 (1901-1978)

独創的なアイデアにより多変数関数論を築いた日本が世界に誇る数学者。珠玉の論文集「Sur Les Fonctions Analytiques de Plusieurs Variables」が岩波書店から出版された (1961)。「春宵十話」, 毎日新聞社 (1963), 等随筆集多数。1960年文化勲章受賞。
(イラストは岡潔先生の写真集から飯高順による)