開 演 の 前 に

3 次元空間に，球や円柱やその他さまざまな形をした物体があり，その表面に垂直なベクトルや接線ベクトルや，その物体の表面積，曲率，体積，物体表面から流れ出る流束，その積分などを，日常的な経験に助けられて，直感的に把握することは難しくないだろう．ところが，空間が 4 次元，100 万次元，無限次元となると，とたんに方向感覚を喪失し，直観に頼ることができず，5 里霧中を彷徨ってしまう．ベクトル解析はそのような問題に簡単明瞭な解答を与える学問である．2 次元と 100 万次元をほとんど同じに扱うことができるのは驚異だ．3 次元以外は無用の長物と思うかもしれないが，次元を変えて初めて，3 次元空間において自明だった事実の意味を理解できるようになる．2 個のベクトルの掛け算で，ベクトルになる量がある，と問答無用，頭ごなしに教えられるのが普通だが，ベクトル積が存在するのは，私たちの 3 次元以外では 7 次元しかない．私たちは特別の空間の中に住んでいるのだ．

ハミルトンは，妻と 2 人で，ダブリン郊外ロイアル運河沿いを歩いているとき，ベクトル積を発見し，ブルーム橋に公式を刻み付けた．空間が 3 次元ではなかったら，ハミルトンはベクトル積を発見できなかったことになる．ハミルトンは 21 歳で，トリニティーコレッジ天文学教授，王室天文学者，ダンシンク天文台所長に指名された．一方，ハミルトンに先駆けて（出版はわずかに後になったが），ベクトル積を発見したのがグラスマンである．グラスマンはハミルトンよりもはるか先に進んだ n 次元空間におけるベクトルを考察していた．グラスマンはシュテティーン（現在はポーランド領シュチェチン）のギムナジウム教師で，生涯大学に職を得るのぞみはかなえられなかった．家庭的に不幸で，晩年は酒に溺れたハミルトンと，外でビール一杯を飲んだこともない，よき家庭人だったグラスマン

との対比も興味深い．2 人の数学者がベクトル積を発見した場所として，ブルーム橋と，シュチェチンのギムナジウム教授公舎の写真を挿入してある．第 1 章冒頭の写真は，女性数学者アニェージの住居があったモンテヴェッキア山頂からさらにマリーア聖所へ息を切らせて上った 176 段の階段だ.

本書は，抽象的な概念や記法は極力避け，近代兵器に抗して，弓矢と石斧で闘うようなものだが，具体的なわかりやすい記述を目指した．証明は他書に頼らず，すべてやり直した．ベクトル内積の分配法則も，他書では一瞬に通り過ぎるところを，7 転 8 倒の思いで証明してある．ガウス - ボネーの定理の証明は，直交座標を導入して楽をするのが常だが，うんざりするほど面倒な，直接的な方法を選んだ．数学は，手を振りまわす議論よりも，机にへばりついて失敗を繰りかえしながら計算する，面倒な方が面白い．道なき道を這いずり回りながら，茨をかきわけ，満身創痍で開けた土地に出たとき，まっすぐな自動車道を発見して，がっかりするより，充実感を感じるものだろう．ミンコフスキーは，4 次元空間についての講演の中で,「物理学者は，すぐ近くですでに完成した数学者の快適な道が前に通じているのに，これらの概念を一部あらたに発見し，薄暗い原始林の中で苦労して道を切り開かなければならない」と言っているが，苦労して道を切り開くのが楽しいのである．ハミルトンのナブラ $\boldsymbol{\nabla}$ の 2 乗が n 次元曲線座標のベクトルに作用した結果は，内外のどの本にも書かれていないが，めまいを起こしながら導いてみた.

1 次元の微積分で主役を演じるのがライプニッツの微分演算子 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ であるのに対し，ベクトル解析で主役を演じるのがナブラ $\boldsymbol{\nabla}$ だ．古代アッシリアの竪琴に起源がある用語である．ベクトル解析は電磁気学とともに発展したので，物理学者たちが命名した．第 1 章から第 4 章までが，協奏曲で言えば第 1 楽章アレグロ，デカルト座標における微積分が主題である．第 3，第 4 章でおもむろに現れる $\boldsymbol{\nabla}$ は単なる微分演算子だが，なめらかな曲線座標に乗った $\boldsymbol{\nabla}$ は，第 5，第 6 章，協奏曲第 2 楽章アンダンティーノで共変微分演算子の役を演じる．第 7，第 8 章，協奏曲第 3 楽章ロンド - アレグロでは，曲面と微分形式でフィーネに向かう．アフィン接続と名を変えた $\boldsymbol{\nabla}$ の活躍する終楽章だ.

開演を知らせるブザーが鳴っている．席に戻ることにしよう.

一般相対論 100 周年にあたって，著者