

訳者まえがき

数学を教えるときに、数学者は必要以上に厳密性を強調しているのかもしれない。尊敬する先生が、こんなことを言っていたのを思い出すことがある。

「証明は定理を理解するためにあるんだよ。だから、証明を読んで定理が余計わからなくなるようなら、その証明は必要ないんだ。」

数学の勉強すべてで、これをしてしまっていたら、数学の研究はできないかもしれない。しかし、数学を勉強する人のほとんどは、数学の研究をする人ではなく使う人だ。その人たちが数学を使うときには、数学はどんな役割をするのだろうか。

数学は量的な関係を正確に表す言葉として使う。そして、それらの関係から量的な結論を引き出す。そのためには、現在の数学の授業は悪影響の方が多い。この本は数学を必要とする人たちに、実際に必要な手段とそれを教えてくれない数学の授業とのギャップを埋める役割を果たしている。

厳密性だけを心がけて授業をしている数学の教員には、とんでもない本に見えるかもしれない。相加相乗平均の関係を直角三角形で証明する。ナビエーストークス方程式を解かずに欲しい結果だけを、ナビエーストークス方程式を使ってひっぱり出す。一見難しそうなの定積分を5分以内に、5%以下の誤差で電卓やコンピュータを使わず計算する。どれも、今までの数学の授業になれていたら、ひっくり返ってしまうようなことをしている。

しかし、本当に数学を使っている人たちにしてみれば、厳密性とか数学の論理性とかは、ある意味邪魔な場合もあるだろう。扱っている問題によって、正確な数値を得るという意味が違ってきて当然である。ある問題では、10%の誤差が許されてしまう。他の問題では1%の誤差も許されない。それぞれの問題

iv 訳者まえがき

で、同じ厳密性を目指す必要はないのである。必要なのは、今要求されているレベルに誤差を抑えて見積もりを出すことである。

この本は、必要な誤差以内に押さえて、求める数値を見積もる方法が説明されている。それらは、どれも私たちに取ってなじみのあるものである。しかし、その使い方は斬新で読む人の想像を超えているだろう。しかし、一度読んで理解すると、その方法がどんなに大きく、いろいろな分野に広がっていくかがわかるだろう。

理論的な厳密性がなければ、現実の動きを表現することはできない。その通りだが、それが行き過ぎると、理論的な正確さは必ずしも現実の動きを表さない。現象を理想化してしまう方に走ってしまう。厳密に計算された数値よりも、おおざっぱな数値の方がより現実を素直に表していることもある。この本から学ぶことは多いと信じている。

2015年3月

訳者記

巻頭言

たいていの人たちは、数学者の数学の授業を聞く。そんなバカなことはない。数学者は数学の中で、自分の数学の分野を見ている。私たちは、現実の世界の量的な関係を正確に表す手段として数学を使う。そして、この関係から量的な結論を引き出す方法として数学を使う。ということは、今習っている数学は、ほとんどこの目的にはそぐわない。それどころか、たまには悪影響を及ぼしている。

学生るとき、私はもし教員になったらそんな授業は学生にしないと自分に誓ったものだ。そして現実を見つけるための、そこに潜む量的な性質を表現するための、直接的で先が見える方法を見つけるために自分の人生を費やしてきた。自分の誓いを破ったことはない。

まれな例外はあるが、科学や工学を学ぶ上で、私のクラスやこの本で数学を学ぶことは、非常に価値のあることである。この本には、新しい息吹が感じられる。著者サンジョイ・マハジャンは私たちに、とても優しく現実の世界で使える技術を教えてくれる。私たちが当たり前で明らかなことだと思うことでも、彼は私たちを高いレベルに誘ってくれる。特に私が好きなのは、ナビエーストークス方程式の扱いである。私がやったことがない、あり得ない方法を使うのだ。解さえ求めない。彼はいろいろな方法の中の宝石を集めて、私たちにその1つを見せてくれる。

この小さな本の中に、私たちすべてが使い、身につけられる洞察力が詰まっている。皆さんが見つけるいろいろな方法のうちのいくつかを、私も実際に使っている。ぜひ皆さんにも勧めたいと思う。

まえがき

あまりに数学的な厳密性にこだわる数学の教師は、死後硬直したものを教えている。硬直した厳密性は、たとえ正しい結果に導くものでも、論理の飛躍に恐れおののく、ぐずぐずして何もしないでいるより、勇気を出してまず結果を射止め、それから問題点を探しても遅くはない。普通に考えたら正しくないかもしれないが、それがこの本の解決策で、この本の根底にある考え方である。証明なしで、計算なしで、答えを予想する。これがこの本の目的だ。

問題解決の予想や、柔軟な問題解決を教えるためには、道具を集めた教科書が必要である。私も2回使っているが、ジョージ・ポリアの言葉を使えば、その道具は手品のようなものである。われわれの知識全体に広げることができる手法を、この本では作り上げ、磨き上げ、そして実際に使って見せている。多くの分野にまたがる応用例は、それぞれの特別な応用とそこに使っている手段を区別してくれる。一般的に、これにより読者の方々の興味ある問題へ応用できる手段を手に入れ、さらに、実際に応用することができるようになる。

使った例には、積分しないで積分を求める、報道で普通に使われている議論の間違いの指摘、非線形微分方程式で物理の性質をひっぱり出す、ナビエーストークス方程式を使わずに薬の効果を計算する、三角形を最も短い線でカットしたり、角をくつつける、各項が判明していない無理数の項を持つ無限級数の計算など、多岐にわたっている。

この本は、*How to Solve It* [37], *Mathematics and Plausible Reasoning* [35, 36], *The Art and Craft of Problem Solving* [49] などの本の対極にある。これらの本は、正確な問題を、実際に正確に解く方法を教えている。しかし多くの場合、現実には問題の一部分しかわれわれの前に現れないし、適度に正確な答えならば

受け入れられる。正確に計算しすぎると、架けられない橋を作ることになるし、動かない回路を設計することになる。厳密な解析に力を使うのではなく、新しく工夫した解決策を生み出すことに、力を使おう。

この本は、私が担当したMITにおける同じ題名の講座「掟破りの数学」を、何年か続けてできた本である。学生は多くの学部から来ていた。物理、数学、経営、電気工学、コンピュータサイエンス、生物などの分野である。豊富な応用例にもかかわらず、またはそのせいで、学生は扱った方法から多くを学び、いろいろな例への図解と応用を楽しんでいた。読者も同じように楽しんでいただきたい。

この本の使い方

アリストテレスは、マケドニアの若いアレキサンダー（後のアレキサンダー大王である）の家庭教師をしていた。古の碩学として知られている彼は、教える力も、また知識もある家庭教師で、優れた先生であった[8]。教える力を持った彼は、少しの言葉を投げかけ、多くの質問をする。質問をし、考え、議論することが、実りの多い勉強を続けることの源である。よって、この本の中には、2つの質問を設定している。

文章の中に▶の印がある質問：これらの質問は、先生が授業の中で問いかける質問である。そして、問題を解析する中で、あなたを次の段階に導くように誘う役割をする。この質問の答えは、次に続く文章の中にあり、あなたは自分自身の答えの正当性と、私の解析を確かめることができる。

番号が付いた問題：影が付けられているこれらの問題は、授業の後であなたが家に持ち帰る問題である。これらの問題で、あなたは問題解決の手段を練習することができるだけでなく、応用例をさらに広げ、いくつかの手段を一緒に使う練習ができる。そのなかで、明かなパラドックスを解決することもできる。

両方の問題を、少しでも多く解いてみよう！

著作権

この本は MIT の OpenCourseWare と Creative Commons Attribution-Noncommercial-Share Alike の著作権の元にある。出版社と私は、皆さんにこの本を使っただき、非営利に活用することにより、より良い本にしていきたい。間違いの直しや、建設的な提案をいつでもお待ちしております。

謝辞

次の方々、また団体に非常にお世話になったことを感謝します。

タイトル： Carl Moyer.

編集指導： Katherine Almeida , Robert Prior.

原稿の校正および助言： Michael Gottlieb, David Hogg, David MacKay, Carver Mead.

励ましをくれたすぐれた先生： John Allman, Arthur Eisenkraft, Peter Goldreich, John Hopfield, Jon Kettenring, Geoffrey Lloyd, Donald Knuth, Carver Mead, David Middlebrook, Sterl Phinney, Edwin Taylor.

多くの価値ある助言と議論をしてくれた方々： Shehu Abdussalam, Daniel Corbett, Dennis Freeman, Michael Godfrey, Hans Hagen, Jozef Hanc, Taco Hoekwater, Stephen Hou, Kayla Jacobs, Aditya Mahajan, Haynes Miller, Elisabeth Moyer, Hubert Pham, Benjamin Rapoport, Rahul Sarpeshkar, Madeleine Sheldon-Dante, Edwin Taylor, Tadashi Tokieda, Mark Warner, Joshua Zucker.

著作作業： Carver Mead, Hillary Rettig.

デザイン： Yasuyo Iguchi.

フリーライセンスについての助言： Daniel Ravicher, Richard Stallman.

計算に使ったフリーソフト： Fredrik Johansson (mpmath), the Maxima project, the Python community.

印刷に使ったフリーソフト： Hans Hagen , Taco Hoekwater (Con T_E Xt); Han The Thanh (PDF T_E X); Donald Knuth (T_E X); John Hobby (MetaPost); John Bow-

man, Andy Hammerlindl, Tom Prince (Asymptote); Matt Mackall (Mercurial); Richard Stallman (Emacs); the Debian GNU/Linux project.

科学と数学の教育についての助成： The Whitaker Foundation in Biomedical Engineering; the Hertz Foundation; the Master and Fellows of Corpus Christi College, Cambridge; the MIT Teaching and Learning Laboratory and the Office of the Dean for Undergraduate Education; and especially Roger Baker, John Williams, and the Trustees of the Gatsby Charitable Foundation.

ごきげんよう，知識の海でよい航海を

最初の道具は，物理や工学からのお客さんである，次元（単位）を使った解析から始めよう。