はじめに

‘確率’ については，大学２年次あるいは３年次において「確率・統計」とかの名の授業で習っている学生が多数いるだろう．ただ，この授業は教職絡みで，だから使える数学の道具が大学１・２年次の微分積分に限られるため，確率についての説明がどうしても歯切れが悪く，授業を受ける側（= 学生)，また行う側（= 教員) の双方がもどかしい思いをする．

本書は，コルモゴロフにより始められた測度論を基(もと)にした確率論を扱う．上のような学生達にとっては，本書をテキストに使うことによりもどかしい思いが払拭されすっきりとした気分になれるのではないかと期待する．

「共立講座　数学の魅力」の刊行趣旨に ‘本格的な数学の学習をはじめようという読者に対し，数学科の学生が大学の学部 3，4 年生から修士１年で学ぶ水準の数学を独習できる本を提供します’ とある．本書は，この独習の手助けにと，計算や証明をていねいに与える．行間のギャップを埋めるために，説明や理由などを少しくどくなる位に書き込んでいる．今まで何気無く読み飛ばしていた行間にもちゃんとした根拠があったということに気付いて欲しい．１つ１つの小さな演繹の積み重ねにより定理，そして理論ができ上がる．このような読み方に慣れ，そしてそれが自力でできるようになれば，大定理も大理論も何も恐れることはない．

本書では，測度論・積分論は既知とする．念のため，付録において，確率測度に関する積分を泥縄式ではあるがまとめておいた．何かの足しになってくればと思う．「外測度」，「直積測度」，「フビニの定理」などについては，小谷 [15]，佐藤 [21]，志賀 [22] の本を参照して欲しい．

以下で本書の内容を説明しよう．第１章では，確率論の基礎概念について見る．確率空間の定義から始め，確率変数，確率変数系の独立性，期待値，そして確率変数列の収束と行く．確率論特有の言葉使い・記号の使い方，すな

わち，確率変数とは実のところは関数であり，しかしそれを表すのに記号 ‘X’ を用いるということに慣れてもらいたい．最初は違和感を覚えるだろうが，慣れてしまえば何てことはない．

第 2 章では，ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ 上の確率測度（これを d 次元確率測度という）について見る．d 次元確率測度に収束概念 ‘漠収束’ を導入し，また，これに対して特性関数を定義する．確率測度列の漠収束と対応する特性関数列の収束が同等であることがわかる．ここで，第 2 章のターゲットが d 次元確率測度であることを強調したい．多くの確率論のテキストでは，主に 1 次元確率測度を考え，多次元確率測度については，同様の計算でできるというように書いてある．しかし，実際のところは同様という言葉で済まされるものではなく，1 次元と多次元の間には大きなギャップがあると著者は感じる．数学は，1 次元 → 多次元 → 無限次元 という流れで進んで行くから，多次元に関することはどこかで必ずやらねばならない事柄である．だから，少々手間がかかるけれども，第 2 章において多次元確率測度を考えることにした．

第 3 章，および第 4 章では，極限定理について考える．順に

第 3 章　大数の強法則 (<u>S</u>trong <u>L</u>aw of <u>L</u>arge <u>N</u>umbers, 略して SLLN),

第 4 章　中心極限定理 (<u>C</u>entral <u>L</u>imit <u>T</u>heorem, 略して CLT)

である．第 2 章の説明でいったことに反するが，この 2 つの章では，対象とするのは実確率変数列とする．d 次元確率ベクトル列についても同様に成り立つところがあるが，簡単のため実確率変数列に限定する．

3.2 節のネタは Alexits [1], 3.3 節は福山 [9] である．3.1 節の SLLN, 4.1 節の CLT は独立確率変数列を対象としたもので，だから標準的な確率論のテキストにも載っている．しかし，3.2 節, 3.3 節, 4.2 節で考えるのは，必ずしも独立とは限らない確率変数列に対する SLLN, CLT であり，そのテキストでは扱っていない．ここで，「独立性は，SLLN, および CLT を独占しているわけではない！」ということを強調したい．私事であるが，昔，著者がリンデベルグの CLT しか知らない時分に福山 [10] の論文でマクレイシュの CLT の存在を知り，「へぇ〜，独立でない確率変数列に対しても CLT は成り立つんだ」という感想をもった．そのときの驚きをここに伝えるため，4.2 節ではマクレイシュの CLT の証明を与え，4.3 節では，この CLT の方が一般的であるという内容のことを書いておく．

各章の終りに付記を付けておく．これは本文で述べたことへの注意・補足，

述べ（られ）なかったが一言だけはいっておきたいこと等である．限られたスペースのため窮屈で文字が小さく読み悪（にく）いが勘弁して欲しい．本文とは異なり満足いく証明（＝本文と同じ深さの証明）は書いていない．その代り参考図書・文献をあげておいたので，関心のある読者諸氏はそちらを参照してくれるとありがたい．

付録では，先に述べたように確率測度に関する積分についてまとめておく．また，本文（第 1 章〜第 4 章）で必要になった定理・命題などに証明を付けてここにまとめておく．「外測度」，「直積測度」，「フビニの定理」などの事項については，他書に譲ることにしたが，これら以外の事項は，ほぼ本書でまかなうようにしたつもりである．

本書を書くにあたり，貴重なご意見や修正箇所のご指摘をして下さった南就将氏，福山克司氏，および出版に際してお世話になった共立出版編集部の方々（赤城 圭さん，大越隆道氏，…）に感謝いたします．

2015 年 3 月　著　者

本書を読むに際しての注意

本書に現れる ‘命題’ は，「定理」，「命題」，「補題」，「系」，そして「Claim」である．「定理」は各節あるいは各項において主張したい ‘命題’ である．「命題」は本書のいくつかのところで用いる ‘命題’，または他書で使うことも視野に入れた汎用性の高い ‘命題’ である．「補題」は「定理」などを証明するために用意したローカルな ‘命題’，「系」は「定理」などから容易に従う ‘命題’ である．これら以外の ‘命題’ が「Claim」である．日本語に訳すと「主張」となるが，恰好付けて Claim と書くことにする．これをクレームと書いてしまうと「苦情」となってしまうので注意が要る．Claim にはそのような意味は全く入っていない！　この Claim の言葉に初めて出会ったという読者が多いと思うが，逸早（いちはや）く慣れてくれることを願う．