

第2版への序

圏論の第二版は最初のものとの二つの点で違っている：第一に、本論に数多くの訂正と改善がなされた。誤植を修正し、説明と証明における細部の改訂をし、追加の図式を提供し、最後に、モノイダル圏について完全に新しい節を加えた。第二に、多くの新しい練習問題を教科書や自習用に一層役立つように付け加えた。同じ目的で、いくつかの練習問題にも解答を与えた；これに対しては Spencer Breiner と Jason Reed に感謝する。

2009年9月
ピッツバーグにて
スティーブ・アウディ

序

マクレーン著の『圏論の基礎』(*Categories for the Working Mathematicians*)があるというのに、どうして圏論に関する新しい教科書を書くのだろうか？端的に言ってしまえば、それはマクレーンの本は現役の（そして高い志をもった）数学者に向けて書かれたものであるからである。圏論が様々な他の分野や教育課程に普及して30年を経た現在においては、誰もが読める圏論の本が必要なのだ。

この本はカーネギーメロン大学における私の10年来の講義がもととなっている。当時私は数多くの講義を担当し、さらに情報科学・数学・論理学を学ぶ大学生・大学院生向けの上級のセミナーも受けもっていた。この本の題材に基づく講義は、週2回90分・15週の構成であった。これらの講義のもととなったのは、私が大学生時代にシカゴ大学でマクレーンの圏論の授業でとったノートだった。私は授業を通じて、様々な分野を学ぶカーネギーメロン大学の学生たちは、シカゴ大学の数学科の大学院生とはまったく異なるニーズをもっていることをすぐさま理解した。そしてこれらのニーズに応えようとして、講義のために教科書を探す過程で、各種文献で初学者にとって重大なギャップがあることを発見した。そのギャップを埋めていくたびに私の講義ノートは進化し、様々な教科書を補い、ついにはそれにとって代わるようになっていった。

私の講義をとっている学生は離散数学と微分積分か線形代数または論理の一つか二つの講義以上には、わずかな数学の学習歴しかもたないことが多い。それでも、ときとしては、情報科学あるいは論理の研究者として、圏論の基礎的な概念に親しんでおくことが、それ以上の数学的訓練は不要でも、必要となることが多い。数学の学部生も似たような状況である。数学の能力がありながら、そして先の学習に明らかに関連があるのでこの課題を学ぼうという意欲があっても、なお数学的な基礎力が不足しているために、マクレーンの本にはついていけない。大抵の学生は自由群とは何か知らないのに、それが随伴の例だと学んでもピンとこない。

それで、圏論の教科書を書くことにし、同時に参考書にもなるよう企てた。数

学科の学生ばかりではなく、コンピュータ科学、論理、言語学、認知科学、哲学の研究者や学生、そして今や圏論を利用する他分野のすべての人のためとなるようにした。私の野心的な試みは、基礎的な定義、定理、それに証明の方法までもこの読者層に理解できるようにすることであった。そして、主要な（少なくとも元来の）代数や位相における応用に親しませるという企てを捨てた。しかしながら、この話題を述べていくのに、例や応用を空疎なものにしたり、単に飛ばしたりするつもりはない。このレベルの抽象的なものは、開眼させてくれる応用と例なくしては簡単には理解しがたい。

この矛盾に直面して、いくつかの基礎的な例—すなわち半順序集合と半群—を使ってゼロから始めてしっかり説明して話を展開するという方法をとった。そしてそれらをこの本の初めから終わりまで繰り返し使うという方法とした。これはいくつかの言うに値する教育的利点がある。半順序集合も半群もそれ自体がある圏をなして、それらはある意味で一般の圏が有する“2次元”（対象と射）を体現している。圏において起こる多くの様相は半順序集合か半群の一般化として理解するのが最もよい。一方、半順序集合（とその単調写像）および半群（と準同型射）はさらに二つの全く違った圏の例を提供する。そこでは様々な概念を考えられる。例えば、極限の概念は与えられた半順序集合でも半順序集合全体の圏においても考えることができる。

もちろん、半順序集合と半群以外の多くの例も同様に取り扱う。例えば、群と圏の章では群論の初歩を核、商群、準同型定理まで等化子と余等化子の例として述べる。ここで、時折は他のところで、（例えば、ストーン双対に関連して）少し余計に数学の内容を含めている。それは、概念を身近なものにするよう例示するという厳格な意味での必要性を超えているが、私の考えでは、これが、さらに高度な数学のコースに進むいくらかの学生が生まれる最短の道かもしれない。その結果、彼らは近くの果実を獲得して圏論を学んだ利益を得るはずである。

数学の予備知識はマクレーンのものに比べれば軽いけれども、厳密さの基準では譲歩していないと思っている。すべての重要な命題と定理には完全な証明を付けた。そして時々決め切った補題は演習問題とした。（そしてこれらは章末に通常、練習問題として挙げてある。）内容の選択は簡単だった。含めなければならぬ標準的な芯となるものは次の通りである：圏、関手、自然変換、圏同値、極限（射影極限、逆極限）、余極限（帰納極限、順極限）、関手の圏、表現可能、米田の補題、随伴、モナド。これらが学ぶべきことのほとんど全部である。ここで唯一の“選択”できる話題は積で閉じた圏と λ 算術(λ -calculus)である。これは情報科学者、論理学者、言語学者にとって必須である。いくつかの明らかに進んだ話題：2-圏、トポス（どんな深さにしても）、およびモノイダル圏は意図的に含めなかった。これらの話題はマクレーンの本で扱っているのだから読みたい方はこの本を読み終えてから進めるとよい。

最後に、この機会に、この企画を特別に支援してくれたことに対して Wilfried

Sieg に感謝する；Peter Johnstone と Dana Scott には有益な指摘と支援に対して感謝する；André Carus には助言と勇気づけに対して感謝する；Bill Lawvere にはこの本に対して多くの大変有益な意見を下さったことに対して感謝する；そして、私の講義に出席していた多くの学生はこの本の改善案を述べてくれたり、質問してくれた。その結果、内容が分かりやすくなったりした。また、練習問題すべてに当たって、数え切れないほどの誤りと誤植を指摘してくれたことに対して感謝する。参考になる訂正を収集して送ってくださる労をとってくださったりした多くの読者の方にも感謝する。特に、Brighten Godfrey, Peter Gumm, Bob Lubarsky と Dave Perkinson に感謝する。Andrej Bauer と岸田功平にはそれぞれ図 9.1 と図 8.1 を提供してくれたことに感謝する。もちろん、可換図式マクロを提供してくれた Paul Taylor にも御礼申し上げる。そして愛する Karin には言葉にできないほど感謝する。最後に、私の指導教官 Saunders Mac Lane 先生のお陰であるとの感謝の気持ちをここに記したい。先生は私に圏論をご教授くださったり、書き方をお教えくださったりしたばかりか、数学に職を見つける手助けをしてくださった。この本を先生への追悼記念として献上する。

2005 年 9 月

ピッツバーグにて

スティーブ・アウディ