まえがき

本書は「素数定理」と「算術級数定理」の解説を主な目的としている．

素数定理とは，古来から存在する問いかけ「素数はどれだけたくさんあるか」に対する一つの答えである．人類は，19 世紀の後半にそれに到達した．その答えは「素数の個数」を「ゼータ関数の零点」という複素数列で正確に表すもので，現代数学の金字塔の一つとされている．素数定理は，現在もなお，整数論を学ぶ学生・院生が習得すべき必須事項の一つになっている．

もう一つの主題である「算術級数定理」は素数定理の変形版であり，「ある種の形をした素数がどれだけたくさんあるか」を論じた定理である．たとえば「一の位が 3 であるような素数」（10 で割って 3 余る素数）や，「下二桁が 33 であるような素数」（100 で割って 33 余る素数）が無限個あるという事実などが，算術級数定理が含む内容である．

これら二つの定理は，あまたある数学の定理の中でも，以下に述べるようなきわめて稀な特徴を持っており，このことが素数の重要性を物語っている．その特徴は，次の三つに要約される．

特徴 1　素数という素朴な対象を追究した研究であり，研究の歴史は紀元前に遡ること．

特徴 2　問題の素朴さに比べ，定理の証明はやや高度であり，解析学や複素関数論など，現代の大学の課程で学ぶ標準的な数学をフルに用いてようやく証明されること．

特徴 3　未解明な謎が残っていること．リーマン予想に代表される「ゼータ関数の零点の謎」は，過去 150 年以上にわたり現代数学の中心的な研究テーマであり続けてきたが，最先端の研究でもなお，その多くが未解決であること．

私は，これらの特徴を踏まえ，各章の執筆に当たり以下の点を配慮した．

(A) 大学の教養課程程度の数学的素養を持つ読者が，素数定理以前の研究の歴史を概観し，素朴な興味を満たすことができること．（→ 第 1 章）

(B) 専門の数学を学び始めた学生・院生，または他分野の研究者が，複素関数論などの大学で学ぶ基礎的な数学の応用例として，基礎事項を振り返りながら素数定理を概観できること．（→ 第 2 章〜第 5 章）

(C) 整数論の研究を志す者が，新たな研究成果を得られるような，正しい指針を得られること．（→ 第 6 章）

第 1 章では (A) を実現するため，複素関数論を用いずに証明される「チェビシェフの粗い素数定理」を解説し，同時に「n 番目の素数の大きさ」や「素数定理に対数が現れる理由」など，素朴な意味で興味深く，かつ直感的に理解可能な事項の解説を行った．これらは主として 19 世紀中盤までになされた研究の解説である．

第 2 章と第 3 章では (B) の実現を目指し，大学の課程で学ぶ数学のうちで素数とゼータ関数の研究に必要な事項や技法をまとめ，それらを用いてゼータ関数の基本的な性質を紹介した．この部分は 19 世紀後半から 20 世紀中盤までに確立された理論の解説である．それらを用い，第 4 章，第 5 章で素数定理と算術級数定理をそれぞれ証明した．どちらの定理も 19 世紀に証明されたものである．

さらに，(C) を実現するために，第 6 章において，リーマン予想の最先端研究が見出した「深いリーマン予想」を紹介した．リーマン予想がかくも長い期間にわたって未解決である背景に，予想に対する我々の認識不足があったのではないか，という反省がある．リーマン予想で「非零」としていた部分を，少し強い意味に修正し「オイラー積の収束」に置き換えると，リーマン予想が合理的に言い換えられる．本書ではこの言い換えを導入し「オイラー積収束予想」と名付けた．すると，自然な考察から，オイラー積収束予想の主張は中途半端であり，収束域をもう少し先まで突き詰めるべきだと実感する．こうして「深いリーマン予想」に至る．

本書が，純粋に素数を愛する一般の読者から，新たな真実の発見を目指す最先端の研究者の卵たちまで，多くの人々のもとに届くことを願っている．そしてそれが，ゼータの世界の奥深さを人類が継承するための一助となり，次世代の新たな数学を拓くきっかけになれば，私は幸せである．

2015 年 6 月　　著者