まえがき

位相空間のホモロジー理論を創始したポアンカレの言葉に「数学とは異なるものを同じとみなす技術である」というものがある．この言葉はいろいろな解釈ができると思われるが，自然科学のいろんな場面で似た形で現れる数学的現象の本質を抽出して抽象化し，一つの理論にまとめることはまさに「異なるものを同じとみなす技術」ではないだろうか．例えば，平面幾何学における相似拡大，解析学における関数のある点の近くでの一次近似，自然科学，経済学の様々な場面で現れる諸量の比例関係などの中に潜む線形性という本質を捉え，抽象化して理論としてまとめたものが線形代数学である．このように抽象化して理論をまとめておくことで数学的現象の本質の理解が深まり，また，新たな現象が見つかったときには，その理論が適用可能であることさえ確かめれば，同じ考察を再び繰り返すことなく抽象化された理論の恩恵を受けることができる．線形代数学が自然科学のあらゆる分野において重要なものであることは言うまでもないであろう．

本書の主題であるホモロジー代数もまた，様々な場面に現れる数学的現象の代数的な部分をまとめてできた理論であり，今や現代数学の多くの分野において重要となっている．例えば，位相幾何学において，位相多様体などの位相空間について調べる際には，位相空間の情報を計算しやすい形でとりださないといけないが，n 次元的な情報は位相空間の n 次特異（コ）ホモロジーとして現れる．微分幾何学において C^∞ 級多様体を調べる際には，微分形式を用いて定義されるド・ラームコホモロジーを考えることもできる．また，代数学において，群あるいは群作用をもつ加群のもつ情報を群の（コ）ホモロジーの理論によりとりだすことができる．群としてガロア群を考えるとこれは整数論にも応用される．ここに出てきた（コ）ホモロジーたちは，由来は異なるものの，その定義の仕方の代数的部分に共通性が見られる．それを抽象化してまと

めたものがホモロジー代数である．したがって，数学のどの分野においても，研究対象の情報をとりだしてきて代数的に扱う際にホモロジー代数が重要になると言える．

ホモロジー代数を一般的な形で述べるためには，数学の根本である「対象とそれを繋ぐ射」の概念にまでいったん遡るのがよく，それは圏の概念として定式化される．これはある意味で数学の究極的な抽象化である．そしてホモロジー代数ができるような圏としてアーベル圏の概念が定義される．また，位相空間や多様体（の開部分集合）上の関数の貼り合わせの性質を抽象化して考えることによって位相空間上の層の概念に到達する．そして層に対してホモロジー代数を適用することにより層係数コホモロジーが定義される．これは適切な仮定の下で確かに特異コホモロジーあるいはド・ラームコホモロジーと一致しており，したがって種々のコホモロジーの統一的，抽象的な定義を可能にする．

ホモロジー代数については最近いくつかの和書あるいは邦訳書が出版されており，またホモロジー代数についての洋書は多くある．そのような状況において新たに本書を世に出すことにいささか躊躇する面もあるが，本書の特徴として以下のことを挙げたい．本書では基本的な集合論的知識以外の予備知識をほとんど仮定せずに環と加群の定義から始め，圏，層の理論もある程度まで一通り述べる．そして環上の加群に特有な事象よりも一般的に成り立つ抽象的な事象を重視して書く．また，紙数の都合上，具体的な応用事例については途中ではほとんど述べず，最後の節で特異コホモロジー理論，ド・ラームコホモロジー理論との比較を述べるにとどめることにする．より深いさまざまな数学の分野におけるホモロジー代数の応用については他書あるいはそれぞれの分野の専門書を参照されたい．

本書の内容の一部は 2003 年度および 2005 年度に東京大学で行ったホモロジー代数の講義のために準備したノートに基づいている．また，丁寧に原稿を読んでいただき，多くの助言をいただいたことに対して査読者の方へ深く感謝したい．本書が数学の専門的勉強を始める読者の役に立つことを願っている．

2015 年 9 月

志甫　淳