まえがき

本書の目的は，複素関数論あるいは複素解析学に入る前の段階までの数（カズ）としての複素数の解説を厳密性を維持しながらできるだけ平易にすることである．いわば，数学が代数学・幾何学・解析学となる前の段階の「数（カズ）学」である．このような所業は，実は深い蘊蓄を必要とし，筆者のようないくらかでも新しいものをとのみ研究を重ねてきた身にあまり相応しい作業ではない．そもそも，素晴らしい内容の解説が既刊の書物にある．例えば，高木貞治著『近世数学史談・数学雑談』[10]，小林昭七著『円の数学』[4]，佐武一郎著『現代数学の源流』[6] 第 1 章やコルモゴロフ・ユシュケヴィッチ編『19 世紀の数学 II』[14] 第 2 部（マルクシェヴィッチ著・藤本坦孝訳）の初めの部分に歴史を踏まえた複素数についての解説がある．おそらく他にも多くあるであろうこのような記事を読み継げば内容的には十分なものになるであろう．

結局のところ本書は，そのような既刊の書の関連する部分を読み継ぐ作業を読者に代わって試みたものである．その際の取捨選択は，筆者が研究上複素数を扱っていて感じ入るその美しさや深さをもとにしたもので，全く個人的なものである．

本書のいくらか新しい工夫としては，通常の教科書ではあまり触れられることのない数の超越性（例えば，e や π）の初等的証明を紹介した点と，複素数と「定規・コンパス」の組み合わせを強調したことである．e や π については，無理数である証明と超越数である証明をそれぞれ二つ付けた．ある意味，重複しているのであるが，見てほしいのは無理数性の証明と超越性の証明のレベルの差である．後者では，いくらか息の長い証明を辿る根気も求められるが，息の長い論証に慣れておくことは，いつか役に立つことと思う．

本書の構成を簡単に述べる．第 1 章で虚数の導入と複素数の基本事項を解説する．第 2 章では実数の完備性の後にガウスによる代数学の基本定理を証明する．代数学の基本定理の一つの応用として複素数の超越性の判定に用いられ，ディオファントス近似論の出発点となったリュービルの定理を紹介する．その後，e と π の無理数性・超越性の初等的証明を与える．π の超越性の証明では，代数学の基本定理が本質的に使われる．第 3 章では，一次変換と等角性を解説する．第 4 章では第 3 章の結果を用いて非ユークリッド幾何学を解説する．巻末補足では，対称式，代数的数の四則，集合論的実数の構成の補足的解説をする．

各所に複素数の演算を「定規とコンパス」で実現する解説と演習を付けた．この延長線上で最終的には，非ユークリッド双曲幾何を定規とコンパスで描くことを実行してもらう．本書を最後まで読まれた読者は，非ユークリッド双曲幾何の無矛盾性がポアンカレモデルを通してユークリッド幾何のそれに帰着し，結局は実数論の無矛盾性に帰することを経験することになる．一見抽象的と思われるロバチェフスキー・ボリアイの非ユークリッド双曲幾何もその原理は定規・コンパスで紙上に実現されるということを体験してほしいのである．定規とコンパスは，言わずと知れた 2300 年ほど前のギリシャの「ユークリッド幾何学」の原点である．読者には，ぜひ定規・コンパス・紙を用意しその上で複素数の諸性質を実際描き，複素数の概念を実感してほしく思う．目的とするものは同じでもそこへ至る道筋，すなわち作図法は複数ある．時間をかけ色々試みて自ら検討し，自らそれを楽しんでもらえればと思う．もし読者に発見の喜び，「分かった！」という新しく理解を得る喜びを経験してもらえれば，それは筆者にとっての大きな喜びである．

著述については，いわゆる理系・文系ということにかかわらず，一つ読み物として楽しめるように心がけた．これまで大いにお世話になってきた虚数の命への恩返しになればこのうえないことと感謝申し上げる次第である．

平成廿七年夏　鎌倉にて

著者記す