

はじめに

確率微分方程式は、ランダムな揺らぎを持つニュートン方程式である。ニュートンの運動方程式は物体の運動もしくは状態の変化を常微分方程式として記述するものであるが、その常微分方程式にランダムな揺らぎが加わったものが確率微分方程式である。

たとえばコップの水に落ちた一滴の墨汁が拡がっていく様子を思い描いてほしい。羽を広げるように墨が拡がっていく現象の背後には以下に述べるようにランダムに動いている墨粒子のダイナミクスが隠れている。大きな粒の墨粒子(0.08 ~ 0.3 マイクロメートル)は、熱運動する小さな粒の水粒子(0.38 ナノメートル)にあらゆる方向から不規則に突き当たられ、その結果てんでバラバラにジグザグに位置を変えていく。墨の色の濃淡はその付近にどの程度多くの墨粒子があるかという局所的な総和(積分量)で定まり、墨粒子のランダムな動きが集結して墨汁の拡がっていく濃淡を生み出している。濃淡を決めるそれぞれの墨粒子のジグザグな動きは、引力による自然落下に水粒子が与えるランダムな揺らぎを加えた常微分方程式、すなわち確率微分方程式によって記述される。

確率微分方程式は、「全国紙上数学談話会」という謄写版刷りの週刊小冊子に1942年に発表された「マルコフ過程ヲ定メル微分方程式」という伊藤清の論文で初めて導入された。水面上に浮かぶ粒子が水粒子とのランダムな衝突によりジグザグな経路を描きながら動いていく現象は、発見した植物学者ロバート・ブラウンにちなんでブラウン運動と呼ばれている。伊藤はブラウン運動の微小時間変動に基づく積分を創始し、微積分学の基本定理に基づく実変数の微分方程式と積分方程式の対応にならない、確率微分方程式を確率積分に基づく積分方程式として定式化した。今日、伊藤が創始した確率積分、確率微分方程式に関連する解析学は伊藤解析と呼ばれており、1970年代後半に生み出された

マリアヴァン解析とともに確率解析と呼ばれる分野の中核をなしている。

本書の第1章から第3章までは、多くの教科書で触れられている準備的な事実について解説する。本書では、抽象的な枠組みで理論体系を展開するのではなく、基本的かつ標準的な事実と後の章で必要となる事実を、できる限り平易な手法で直接的に紹介するように努めた。たとえば、条件つき期待値は [17] にならない、ラドン-ニコデムの定理を用いることなく導入し、マルチンゲールの2次変動過程の存在も一般論であるドゥーブ-メイエーの分解定理を用いるのではなく [14] のように連続マルチンゲールと停止時刻の組み合わせによる手法により示す。

第4章で確率積分を定義し、その性質と応用について解説する。多くの教科書では、まず L^2 -理論の枠組みで確率積分を定義し、その後停止時刻を用いて一般の被積分関数に拡張するという手法が用いられる。本書ではこの手法をとらず、[11] にならない一般の被積分関数に対する確率積分を直接導入する。この方が確率積分の収束を語るのに適した弱い収束である確率収束を定義の段階から組み込めるからである。このような直接的な導入が可能となるのは、本書では一般的なマルチンゲールではなくブラウン運動に関する確率積分に考察対象を絞ったことによる。数理ファイナンスのモデリングにおいてマルチンゲールに対する確率積分が重要となるが、ランダムなダイナミクスとして確率微分方程式を考察する本質はブラウン運動に関する確率積分で尽きている。

第5, 6章では、確率微分方程式の解と応用について解説する。第5章では、指数写像による解の近似、初期値に関する1-パラメーター変換群としての解の性質など、確率微分方程式の常微分方程式的な側面、すなわちランダムなニュートン方程式としての側面を見る。この応用として、マルコフ性、強マルコフ性と呼ばれる過去と未来の独立性に関する重要な確率過程の性質が、1-パラメーター変換群としての性質と深く結びついていることを明らかにする。第6章では、熱の拡散を記述する偏微分方程式である熱方程式やディリクレ問題などの偏微分方程式論への応用について解説する。

第7, 8章では、第6章とは別の確率微分方程式の応用について述べる。第7章では、確率微分方程式を用いた経路空間（半直線 $[0, \infty)$ 上の連続関数の空間）での初等的な微積分学について解説する。考察するのは、一つは経路空間

上の変数変換公式であり、もう一つは部分積分公式である。どちらもマリアヴァン解析を援用することでより一般の形で述べることができる結果であるが、本書では確率微分方程式の立場からの考察について述べる。とくに部分積分公式の導出は、マリアヴァン解析における微分法とは異なる確率微分方程式に固有の手法を利用しており、それ自身興味深いものである。第8章では、確率解析の一大応用分野である数理ファイナンスに関連して、初等的な市場モデルであるブラック-ショールズ・モデルについて解説する。

本書は第1章の確率論の復習と2, 3箇所を除き、自己完結的にすべての事実を証明を付けている。他書を参照する必要があるときは、そこに挙げた参照文献をたどれば必要な事実が分かるようにしているので、読者自ら確認していただきたい。

吉田朋広先生に本書の執筆の機会を与えていただいた。ここに記して厚く謝意を表します。また、2014年3月の初校脱稿後、丁寧な査読と貴重な提案をいただいた査読者にも深く感謝いたします。

2016年8月

谷口説男