序　文

2002 年から 2003 年にかけてペレルマンがサーストンの幾何化予想の解決を主張するプレプリント [Per02]，[Per03b] を公開してから 10 年以上が経った．その間に証明は多くの人たちによって検証され，すでに正当なものとして認められている．例えばクレイ研究所のミレニアム問題としてはポアンカレ予想は 2010 年に解決が宣言された．この予想とその解決を理解しようとする数学科の院生が本書の想定する読者である．具体的な目的は 1）サーストンの幾何化予想の主張を理解すること，2）必要最小限の準備を行ったうえで予想の解決のための主なアイデア [Per02] を解説すること，3）実際の予想の解決 [Per03b] の詳細を追うための準備を行うこと，の 3 つである．

3 次元多様体は連結和分解，JSJ-分解と呼ばれる 2 段階の分解を経て，一意的に基本部品に分解される．曲面はユークリッド幾何，球面幾何，双曲幾何のいずれかにより一意化されるが，同じような意味で 3 次元多様体の基本部品が等質的な幾何モデルを持つことを主張するのが幾何化予想である．この予想によれば 3 次元の基本部品はさらに 5 種類のモデルを加えた 8 種類のうちのいずれかの幾何モデルを持つことになる．とくにポアンカレ予想は，単連結な基本部品が球面幾何をモデルに持つ，という主張として幾何化予想に含まれる．

与えられたリーマン計量を対称性の高いものに変形してこのような幾何モデルを与えようとするのは比較的素直なアイデアである．しかし曲面の場合とは異なり，3 次元多様体の場合は 2 段階の分解の後の基本部品に幾何モデルが与えられるから，変形に伴って分解も実行する必要があり，そう簡単ではない．ペレルマンはリッチフローと呼ばれる発展方程式に従って計量を変形し，その特異性と長時間挙動を解析することにより 2 段階の分解をも実行して幾何化予想を解決した．幾何化予想をこのように解決する構想自体はもっと前からあり，ハミルトン・ヤウプログラムと呼ばれている．

ハミルトン・ヤウプログラムを理解，実行するためには幾何モデル，3 次元多様体の分解，リッチフローとその特異性，長時間挙動を理解する必要があるが，本書の章立ても概ねこれに従っている．各章を読むために必要な予備知識とともに簡単に全体の構成を述べておく．第一章では幾何モデルの形式的定義を与え，同時に幾何モデルを持つ 3 次元多様体の具体例を見ていく．最終節で 3 次元の幾何モデルが 8 種類であることを見る．第二章では 3 次元多様体が一意的に基本部品に分解されることを見る．最後の節でサーストンの幾何化予想とハミルトン・ヤウプログラムについて述べて，目的の 1）はこの章までで終える．ここまでは群論，代数的位相幾何，リーマン幾何などの初歩以上の予備知識は仮定しないが，リー群，ファイバー束にはある程度慣れ親しんでおく必要がある（これを超える内容については簡単なまとめを付録とした）．第三章からは主にリッチフローについて論ずる．第三章では準備として，とくに解析的な結論について述べる．最後の二節ではリーマン幾何について初歩以上の知識を要する．§3.5 に簡単に予備知識をまとめたが，必要ならば入門書を読んでから内容に入った方がよい．またこの章全体に放物型偏微分方程式の性質を論ずることが多い．証明まで立ち入っているものも多いが，一部は引用文献に譲る．第四章は §4.8 までで目的 2）の [Per02] の内容を見る．非負曲率空間の幾何が重要となるのでこれについては §4.4 と §4.5 にまとめた．最後の二節で目的 3）の [Per03b] を概観する．[MT07]，[KL08]，[Kob11] などで詳細を追う前の準備として読むことを想定し，この部分は証明の詳細まで述べていない．

末筆ではあるが，目次案すらなかなか決まらないなか筆者の遅々として進まない執筆を辛抱強く待っていただいた共立出版の赤城圭氏，校正を担当していただいた三浦拓馬氏，不備の多い原稿を注意深く読み，多くの有益な指摘をしていただいた査読者に感謝の意を表したい．

2017 年 2 月　戸田　正人