

まえがき

量子群とは何だろうか？

「量子群」という用語自体は、Drinfeld による 1984 年の国際数学会議での講演で用いられて以来数学や数理論物理学の様々な文脈で用いられるようになり、関連する研究が爆発的に進展した非常に現代的なものである。現在量子群の理論といったときには、以下のような 1980 年代半ばごろの研究に触発されて発展してきた諸理論を指すといつてよい。

一つ目は、Faddeev らによる可積分系の研究を契機として、Hopf 環の枠組みで Drinfeld、神保らにより与えられた量子普遍包絡環の理論である。二つ目は、可換作用素環と局所コンパクト空間や測度空間との間の双対性を動機として、Woronowicz により与えられたコンパクト量子群の理論である。三つ目は、Jones の研究に始まる部分因子環の分類や結び目の不変量との関係をテンソル圏の枠組みの中で整理する試みから生まれた量子対称性の理論である。

これらはどれも、様々な数学的構造の対称性を表す「群」と呼ばれる基本的な数学的対象を、双対性と呼ばれる原理に基づいて群でないものに変形した新たな数学的対象を与えている。しかし、具体的にそのような対象をどうやって定式化するかという方法論は様々であり、残念ながら（あるいは、幸いなことに）これら量子群として知られているものをすべてまとめられるような単一の理論体系（公理系）は今のところ得られていないし、そのようなものを意義のある形で定式化するという事は不可能に思われる。だからといってこれらの理論が群の概念の無闇な一般化を与えようとしているというわけではなく、異なった定式化による量子群たちがなんらかの双対性を通じて互いに関係していたり、あるいは共通の原理に従った振る舞いを見せるということも確かである。そのような対応を通じて幅広い数学の分野の間に思いもよらなかったような関係をもたらす、とても深い指導原理を与えているということが量子群の興味深いところであると思う。

そこで、本書では様々な方法論による量子群の定式化を紹介し、それらが互いにどう関係しているのかということに重点を置いて解説することにしたい。第 1 章では量子群のパラダイムに至る準備として、Fourier 変換における双対性に関わる諸概念、特に局所コンパクト群と、対応する様々な代数系を紹介する。続く第 2 章では、数理論物理学と量子群の理論の間の重要な関係を与える Yang–Baxter 方程式について紹介する。この 2 章が第 4–6 章の題材の基礎をなしている。第 3 章

では、量子群の最も基本的な例である $SL_q(2)$, $SU_q(2)$ 量子群と呼ばれる概念を表す一連の代数系を紹介する. 続いて第 4 章では Yang–Baxter 方程式に関わる一連の「量子化」問題について解説する. 次の 2 章は互いにほぼ独立しており, Drinfeld–神保量子群の幾何学的な側面と代数的な側面についての理論を紹介している. 第 5 章では量子群の構造の幾何的な側面を表す Poisson–Lie 群の概念や, より一般の Poisson 多様体の理論における量子化理論の応用について解説する. 一方, 第 6 章では量子群の表現論や, より一般の「非可換空間」の文脈における代数的な理論について述べる. 第 7 章では Woronowicz に始まるコンパクトおよび局所コンパクト量子群の理論について解説する. こちらは第 2, 4–6 章とはある程度独立になっているので, 第 3 章のすぐ後に読むことも可能である. 最後に第 8 章ではテンソル圏に関する諸理論について紹介する. テンソル圏による定式化は量子群に関する様々なアプローチをつなぐ役割を果たしており, 実は第 7 章までの各所で顔を見せている. 論理的には第 8 章の前半の内容はもっと前に述べるべきことだが, より抽象的で現代的な概念なので最後に解説することにした. また, 付録として, いくつかの基礎的なことについて簡単な解説をまとめてあるので必要に応じて参照してほしい.

各章を見てみればわかるように, 様々な数学的事実に関する証明は基本的に載せていないし, テンソル圏や作用素環による関わる事柄など一部説明が前後しているものもある. そういった意味で本書は普通の数学の教科書とは異なった性格のものであり, これを読んだだけで量子群についての研究が始められるということはないだろう. 一方で, 量子群について興味があって学んでみたくても, 様々な切り口がありすぎてどこから手をつけたらいいのかわからないと敬遠してしまっている人も多いのではないかと推察される. そのような方に, 量子群に対する様々な分野・方法論を見渡せるような「地球儀」を提供することが本書の目標である. 個々の題材に興味を持たれた読者の方はぜひ, 各章末の文献表に挙げた専門的な文献とともに自分だけのより詳しい「地図」作りのための探検に挑戦してみしてほしい. また, このように広範な分野にわたる事柄をくまなく紹介するということは著者の能力を大きく超えたことであり, 様々なことについて説明を割愛せざるを得なかった. 結果としてどの章もそれぞれの専門家から見れば不満の残る説明になってしまっているのではないかと思うが, 量子群の様々な側面をなるべく簡単にまとめて紹介するための試みとして見ていただければ幸いである.

最後に、以下の方々に感謝の言葉を述べたい。推薦人として本書を書く機会をくださった河東泰之先生には、大学に入学した最初の学期に先生の授業を受講して以来お世話になっており、大学院生時代は指導教官として、その後も様々な機会に終始的確なご指導をいただいたおかげで今までなんとかやってこれた。また、山上滋先生、泉正己先生、林倫弘氏、植田好道氏、小沢登高氏、戸松玲治氏にも様々な場で励ましや研究上の貴重なアイデアを頂いている。また、研究活動を快く支援してくれたお茶の水女子大学理学部数学科の同僚の方々にも改めて感謝したい。

執筆中は共立出版の信沢孝一氏・大越隆道氏に様々なご迷惑をおかけしてしまった。度重なる原稿の遅れにもかかわらずこのようなまったく売れそうにない本を出版していただけることに感謝の念でいっぱいである。

また、緒方芳子氏、荒野悠輝氏、山下真由子氏には草稿について様々なコメントを頂いた。特に荒野・山下氏に丁寧に草稿を読んでいただいたおかげで、多くの間違いや不明瞭な点を修正することができた。もちろん、残っている間違いや誤解をまねく点はすべて私の責任である。

本書に書いてあることのほとんどは Kenny De Commer, Sergey Neshveyev, Ryszard Nest らとの交流や共同研究を通じて学んだことである。彼らと一緒に以前は想像もつかなかったような様々な題材に取り組むことができたし、このような幸運な出会いがなければ量子群について本を書くというようなことは到底なかっただろう。Kenny, Sergey, Ryszard, どうもありがとう。

2017年2月

山下 真