序文

本書は，1 変数保型関数の古典理論における基礎を解説し，併せて，その数論への応用例の幾つかを示すことを目標とした．セールの『数論講義』([Ser]) の後半，を基準と考えて執筆したが，上記の目標に合わせて，そこにはない主題を幾つか加えて記述した．

[1] 理論的内容で付け加えたのは以下の 3 点である．

(1) 合同部分群に関する保型形式が重要である点を考えて，部分群に関する保型形式についても論じた．ただし，合同部分群についてのヘッケ作用素については，$SL_2(\boldsymbol{Z})$ の場合の類推を手助けとして概論を述べ，実際に第 7 章で用いる部分に焦点を当ててその運用を解説した．これらについては，Koblitz, Diamond-Shurman, 河田のテキスト ([Kbl], [D-S], [Kwd]) を参考にした．

(2) テータ函数は，実際の保型形式をその保型挙動の下で明示的に考察する際に，基本的に重要なものと考え，1 章を割いて解説した．

(3) 超幾何函数は，保型形式と非常に近い関係にありながら，一般には保型形式論の中で扱われることはない．とくに，モジュラー曲線の種数が 0 の場合，保型形式と超幾何函数とは表裏の関係にあると考え，1 章を割いて解説した．これによって，クラインのモジュラー函数の応用の幾つかの場面で，超幾何函数の性質が果たす役割の実際を見ることができるように工夫した．さらに，最終章は超幾何保型函数の独壇場である．

本書の査読者から，超幾何函数が保型形式と結びつくのは，モジュラー曲線の種数が 0 の場合に限られている点についての，鋭い指摘があった．現在，明確な対応関係がつけられるのは，確かにそのような場合に限定されるが，筆者は，多変数の場合も込めて，より一般的な各種の超幾何微分方程式ないしフックス型微分方程式を考察することによって，さらに多面的な，保型形式と超幾何的現象との相互的干渉作用が生じることを期待している．そのような事例の

一端は第7章の最終節 7.6.7 に見ることができる.

[2] 筆者が心がけたのは，保型関数の一般理論が，その領域と境界を接する諸理論と交錯する場面でどのように機能しているのかを，明示的に示すことであった．これらは最後の 2 つの章で，それ以前に準備された結果を駆使して展開される.

(a) 19 世紀末にクラインが [Kl-Fr] において，合同部分群に関する保型関数を構成的に論じており，その今日的応用について，第7章で解説した．それ以前の章で用意した個々の議論が連携して機能する様子がここで見えると思う.

(b) 最終章で，超幾何微分方程式から導かれる保型関数によって，志村五郎によって構築された，高次虚数乗法論（[SmrB]）に実体的内容を付与することを試みた．ここでは，ヒルベルト第 12 問題の真に高次的実例の幾つかを構成した.

[3] 用字について．本書において筆者は2 つの“かんすう”の用字を分けて使用した．筆者は数十年にわたって“関数”と“函数”とは別の概念と考えて区別して用いてきた.

関数は，定義集合から数空間への写像一般を指す．たとえば，“連続関数”などである．また，有限回代数的操作で構成される関数も，この中に入る．たとえば，”多項式関数” などである．一方，函数とは，解析的な構成によって得られた，複素変数によって値が指定される，定義域の曖昧さを残した「表示式」のことであり，定義域を表示式の有効範囲の外部まで自然に拡張すれば，一般に多価性を生じ，前記の一般概念や代数的操作の範疇から生じる関数とは異なっている．たとえば，ヤコビ・テータ函数，リーマン・ゼータ函数，ガウス超幾何函数などいわば人格を備えた対象である．保型関数論においては，とくに，この 2つの異なる関数概念が交錯しながら理論が構築されている．これが，筆者が敢えて，2 種類の“かんすう”の用字にこだわった理由である．遺憾ながら，編集者（および編集会議）からは，明確な理由を提示することなく“函数”の用字を撤回するよう再三求められた．筆者としても，叢書中の一巻に関して一数学者のみの数学観に固執するのも憚られたので，この要請に同意

した．しかし，異なる意味内容に対して同一の用字を充てることはできないので，本来「函数」とすべきところはルビ打ちの「関数」で代用した．読者諸姉諸兄の了解をお願いしたい．

2017 年 5 月，ヴェネツィア Fondamenta Nova の“Ca' del Borin （海の微風荘）”にて，

執筆開始以来，夏にはここ，Padova 大学の F. Baldassarri 教授の別邸である“海の微風荘”で過ごしながら，一人俗界を離れて構想を練り，筆を進め，そして本書の完成に至った．同教授の好意に感謝したい．

志賀弘典