はじめに

「新しい酒は新しい革袋に」という諺がある．実際, 佐藤幹夫が提唱した新古典解析学とは, 19 世紀に栄えた古典解析学を最先端の数学の枠組みの中で再定式化および高次元化し現代に蘇らせようという壮大な構想であった．本書では 1970 年代に登場したこの新古典解析学すなわち代数解析学の基礎を解説する．$\mathcal{D}$-加群はその中心的な対象であり，従来の解析学における関数の四則演算や代入，積分などの基本操作はすべて代数幾何学の言葉を用いて $\mathcal{D}$-加群のそれに抽象化し一般化される．こうしてこれまでは取り扱いが困難であった（線型）偏微分方程式のシステムの研究が可能になり，佐藤-河合-柏原 [201]，柏原-河合 [111]，柏原 [104] などにより非常に美しい一般理論が建設された．それまでは偏微分方程式の一般理論など夢物語と思われていたので，これは数学者の世界においてまさしく空前絶後の快挙であった．またこれは偏微分方程式論が個々の方程式を別々の方法で扱う従来のスタイルから脱却し純粋数学としての理論体系を整えた歴史的瞬間でもあった.

$\mathcal{D}$-加群が大切であることは，システムの特性多様体がこれを連接 $\mathcal{D}$-加群として扱うことで初めて定義されることからも明らかである．高次元のシステムであって特性多様体が可能な限り小さく，その正則関数解が有限次元になるものをホロノミー $\mathcal{D}$-加群と呼ぶ．ホロノミー $\mathcal{D}$-加群は古典解析で大きな成功を収めた複素平面上の常微分方程式の高次元版であり，なかでも正則ホロノミー $\mathcal{D}$-加群に対するリーマン・ヒルベルト対応（柏原 [104]）はその後の数学の発展に非常に大きな影響を与えた．例えば 1980 年代以降，偏屈層 ([10])，交叉コホモロジー ([63])，層の超局所解析 ([115], [116])，混合 Hodge 加群 ([193], [194]) などの革新的な新理論がリーマン・ヒルベルト対応を契機として誕生した．また表現論においては Beilinson-Bernstein [9] および Brylinski-柏原 [25] による Kazhdan-Lusztig 予想の解決を皮切りとする飛躍的な進展をもたらした．こ

うしてこの「はじめに」の最後の図のように，$\mathcal{D}$-加群の理論の影響はすでに現代数学の多くの分野にわたっており, しかもその適用範囲は年々広がっている．これは$\mathcal{D}$-加群の理論が代数幾何学におけるスキーム理論の自然な非可換化，無限次元化であり, $\mathcal{D}$-加群や偏屈層が持つ多くの構造や美しい対称性が現代数学の様々な問題の解決に極めて重要な役割を果たしていることを示している．特に代数幾何, 数論幾何, 表現論, 特異点理論などで日々活発に論文が書かれていることは, アーカイブを見ていればすぐに気が付くことである．ここ数年来だけでも，不確定特異点を持つホロノミー$\mathcal{D}$-加群の理論（Kedlaya [129], [130], 望月 [168]）とそのリーマン・ヒルベルト対応への応用（D'Agnolo-柏原 [29], Sabbah [192]）やシンプレクティック幾何学への応用（Guillermou-柏原-Schapira [75], Nadler [172], Nadler-Zaslow [173]）など多くの画期的進展があった.

このような状況の下, 特に学生諸君らによる$\mathcal{D}$-加群の理論に対する関心は日に日に増大しつつあるようにみえる．筆者はそのような期待に応えるべくできるだけ少ない労力で理論全体が概観できるよう, 細心の注意を払って本書を執筆した．特に付録においては, 本書を読み始めるにあたり重要な層の理論や導来圏について丁寧な説明を心がけた．またスキーム上の代数的$\mathcal{D}$-加群について解説した以前の堀田-竹内-谷崎 [89] とは異なり, ここではより親しみやすい複素多様体上の解析的$\mathcal{D}$-加群を主に扱った．概ね 7 章まではほぼ self contained に証明が与えられており, これで理論全体の概要がつかめるものと期待している．残りの章は各論であり, 読者がより進んで様々な新しい話題に興味を持ち研究に着手する一助になることを期待して執筆された．本書の後半部では主として$\mathcal{D}$-加群の幾何学への応用が論じられる．$\mathcal{D}$-加群の代数幾何学や特異点理論への応用は多くの数学者の関心事である．また本書を読み始めさらに$\mathcal{D}$-加群の使用法に熟達するためには, 代数幾何学や複素解析幾何学の基本的な考え方や例に徐々になじんでゆくことが望ましい．以上の２つの理由から$\mathcal{D}$-加群とその幾何学への応用をセットにした本書を企画した次第である．前半部で学習した$\mathcal{D}$-加群の基礎理論が幾何学にどのように応用されるか, 読者は後半部で具体例を通じて楽しみながら学ぶことができるものと期待している.

じつは代数幾何学と代数解析学は表裏一体であり, 後者は前者の一部門とい

うこともできる．したがって代数解析学を理解するためには, 代数幾何学や可換環論の基礎知識がどうしても必要である．このことは導来圏で考えなければ $\mathcal{D}$-加群の基本的な操作を定義することすらできないことからも明らかである．また連接 $\mathcal{D}$-加群の特性多様体の定義が代数幾何学における射影スキームの理論の自然な延長線上にあることからも, 代数幾何的なものの見方の重要性がよくわかるであろう．本書はできるだけ少ない予備知識で $\mathcal{D}$-加群の理論に入門し徐々に代数幾何的な議論にも慣れてゆけるよう工夫して執筆されたが, つねに基礎に立ち返って理解に努めることが大切なのは言うまでもないことである．こうした当たり前のことが軽視され続けてきたことが, 日本ではごく一握りの人々にしか $\mathcal{D}$-加群の理論が理解されなかったことの原因であると思う．特に解析学においては, すぐに応用し問題を解くことのみに目が向きがちで純粋数学としての視点が忘れられかけているのは問題である．解析学の研究者の方々, なかでも人を評価する立場の方々はぜひ基礎学問としての代数解析学の研究を長期的な視野で温かく見守って頂きたい．基礎学問の芽は大変ひ弱であり, 社会の庇護を必要としている．しかしながらそれがひとたび開花すれば文化的に極めて大きな発展が期待できるのは, 上で見た通りである．$\mathcal{D}$-加群が発祥の国で理論がほとんど普及しなかったのは, まったく無念という他はない．本書が国際的に標準的なスタイルの代数解析学が日本においても普及する一助となれば幸いである．

本書を執筆するにあたり, $\mathcal{D}$-加群理論の偉大な開拓者である柏原正樹氏の影響は計り知れない．実際筆者の非才により, 本書のいくつかの証明には, [89] だけでなく柏原氏の一連の著作 [102], [108], [116] の証明の記号を変えた引き写しに近いものもある．柏原氏の論文や著書はどれも珠玉の芸術作品のようなものであり, これらの美しい作品に接することがなければ筆者の人生はずっとつまらないものになっていたことだろう．また Pierre Schapira 氏はこの分野についてまだ西も東もわからなかった筆者をパリ第 6 大学へ受け入れ, 筆者をつねに励まし正しい方向に導いて下さった．Schapira 氏の厳しい批判がなければ, 筆者の研究は代数解析とはいってもまったく国際的に通用しないおかしなものになっていたことだろう．小清水寛氏と杉木雄一氏は, 筆者がまだ研究者として駆け出しの時期に多くの議論に付き合って頂いた．筆者が $\mathcal{D}$-加群の

理論を何とか自分なりにも理解できたのはひとえに彼らのおかげである．特に本書の執筆においても, 小清水寛氏がまとめた膨大なノートが大きな役割を果たした．松井優氏にはその後の多くの共著論文などで大変お世話になった．本書の後半部で述べた$\mathcal{D}$-加群の特異点理論への応用に関するいくつかの結果は, 松井氏の寄与なくしては決して得られなかったものである．池祐一氏ならびに齋藤隆大氏には本書のタイプや校正などで非常にお世話になった．実際本書の随所に彼らから頂いた貴重な意見や指摘が反映されている．また伊藤要平氏は本書の原稿をもとに筑波大学でセミナーを行い多くの誤りを訂正して頂いた．桑原敏郎氏と安藤加奈氏はそのセミナーに出席し多くの貴重なご意見を頂いた．石井大海氏はこの「はじめに」の最後の図を作成して頂いた．本書のレフェリーには多くの貴重な助言を頂いた．それ以外にも実に多くの方々のご協力のおかげで何とか本書を完成することができた．これを深く感謝する次第である．最後にこのような貴重な機会を与えて下さった共立出版の方々に深くお礼申し上げる．

2017年6月吉日　　　筑波大学　竹内　潔

共立講座 数学の輝き 全40巻予定【11】巻 D加群
竹内 潔著·新井 仁之·小林 俊行·斎藤 毅·吉田 朋広編
http://www.kyoritsu-pub.co.jp/bookdetail/9784320112056