はじめに

数の世界は，自然数（正整数）から整数へ，そして有理数へ，実数へ，さらに複素数へと拡張されてきた．これらの拡張は，その数の世界での代数方程式が解をもつようにするというやり方で行われてきた．例えば，整数係数の方程式 $3x-1=0$ は整数の範囲では解をもたないが，有理数まで考えると $x=\frac{1}{3}$ という解をもつことがわかる．また，$x^2-2=0$ は有理数の範囲では解をもたないことは，ユークリッドの定理として知られている．もちろん実数まで考えると，$x=\pm\sqrt{2}$ という解がある．方程式 $x^2+1=0$ は実数の範囲では解をもたない．これが解をもつように拡張した数の世界が複素数の世界である．複素数係数の代数方程式は必ず複素数の範囲で解をもつという代数学の基本定理（本書の第 5 章）があるので，数の世界は代数的には，これ以上拡張することはできない．

有理数，実数，複素数おのおのの世界では四則演算ができ，しかも加法，乗法について結合法則，交換法則，さらに分配法則が成り立つ．このような数の体系は体とよばれている．

実数と数直線上の点とは 1 対 1 に対応するから，実数を扱うとき，数直線を用いることによって視覚を通して考えることができる．複素数の場合も同様なことが可能で，複素数と平面上の点を 1 対 1 に対応させることができる．このように複素数に対応させた

平面を，複素数平面とよぶ．複素数平面を用いることによって，複素数に関することがらは視覚を通して理解することができ，複素数の計算を図形的に解釈することができる．今日では，複素数は理工学系のさまざまな分野で不可欠なものとなっている．高校での指導要領でも，2014 年度から数学 III に複素数平面の章が設けられるようになった．

本書の内容について簡単に説明しよう．

まず，第 1 章では，複素数の導入と四則計算，および 2 次方程式の複素数解について学ぶ．読者が複素数の計算や基本事項に早く慣れるように，多数の例をあげ，また，解いていくと理解が深まっていくように例題，問題を配列してある．もうすでにこれらのことに慣れている読者はこの章をとばして第 2 章から始めてもよいと思う．

第 2 章では第 1 章の内容を土台にして，複素数平面の導入と基本的な事項を学んでいく．複素数を平面上の点で表すと，複素数どうしの和はベクトルとしての和になり，複素数を掛けることは原点を中心とする回転と原点を中心とする相似拡大（縮小）の合成で表すことができる．このように，複素数の計算を図形的に解釈することができるから，複素数は平面図形の問題にも応用できるのである．

後の 3 つの章では複素数・複素数平面を考えることで見通しがよくなることや，表現が簡潔になること，複素数・複素数平面の応用などを紹介する．

まず第 3 章では，複素数平面を用いると証明が簡潔になる初等幾何の定理をいくつか紹介する．複素数平面の便利さが理解でき，十分に楽しめる内容であると思う．

第 4 章では，空間図形の平面への正射影に関するガウスの基本定理（ガウスによる Axonometry の基本定理）を紹介する．これ

は，立方体や正四面体などの空間図形の正確な正射影図を平面上に描くのに用いられる．この定理は，複素数を用いなければ，記述が複雑になる．また，平面上に描いた四面体の投影図が，正四面体の正射影であるための必要十分条件を与える Eastwood と Penrose の定理も紹介する．

第 5 章では，連続な複素関数 $f(z)$ に対して，$f(z)$ の原点のまわりの巻き数とよばれるものを定義し，それを用いて方程式 $f(z) = 0$ の解の存在定理を証明する．この定理から，代数方程式は必ず解をもつという代数学の基本定理や，円周とその内部を合わせた領域からそれ自身への連続写像には必ず不動点が存在するという不動点定理などが導かれる．

最後に，本書の原稿について貴重なコメントを下さいました編集委員の飯高茂先生，中村滋先生，出版にあたっていろいろとお世話になりました三浦拓馬さんと髙橋萌子さんに感謝します．

2017 年 7 月

桑田孝泰・前原 潤