訳者まえがき

本書はStillwell著〈*Elements of Mathematics From Euclid to Gödel*〉の邦訳です．タイトルは直訳ではなく，『初等数学論考』としました．著者は“Elements”をエウクレイデスの〈*Elements*〉（ラテン語では *Elementorum*）と響き合うことを意識して用いていますが，すでに定着している邦訳のタイトルの『原論』では「初等的（elementary)」と繋がる意味合いが見えにくいと判断しました．原書は，その序文でも述べられているように，フェリクス・クラインの『高い立場から見た初等数学（*Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*)』の出版の100年後に，それに動機づけられて生み出されたものです．なお本書では，アレクサンドリアのエウクレイデスについては，英語からの音訳の「ユークリッド」を採らず，最近の，特に数学史の分野での用法にならって，一貫して「エウクレイデス」を採用しました．特に「ユークリッドの互除法」とか「ユークリッドのアルゴリズム」，あるいは「ユークリッド幾何」といった響きに馴染んでいる読者にとってはいくらかの違和感があるかもしれません．しかしまた一方で，二項係数に関する「パスカルの三角形」についてはパスカルよりも300年ほども先んじて著書に取り込んでいた中国の数学者の朱世傑（とかその著書『四元玉鑑』）を，英語からの音訳ではなく漢字で表すことの「自然さ」は捨てられないでしょう．英語からの音訳を採らなかった訳者の判断をご理解ください．

原書で著者が目指すところは二つあり，「第一の目標は初等的な数学とその財産を鳥瞰すること」，および，「第二の目標は，『初等的（elementary)』ということが何を意味するのかを明らかにしていくこと」です．これらの目標に向かって，著者はまず第1章で「初等的な水準での重要な八つの題目――算術，計算，代数，幾何，微積分，組合せ，確率，論理学――を例証的な幾つかの実例を用いて簡潔に導入」しています．ここでは，しかし，すでに著者の第二の目標が先取

りされています．というのは，著者は「初等数学」についての自身の考え方に基づいて，原著のタイトルの〈Elements of Mathematics〉，すなわち「(21 世紀における）数学の基本要素」としてこれら八つの題目を宣明しているからです．このうちの新しいものと目される四つの題目，計算，組合せ，確率，および，論理学は，「初等数学（Elementary Mathematics)」の一般的なイメージにおいては，他の四つの題目，算術，代数，幾何，微積分と同列に組み込まれるものではないように思われます．それでも著者は，以下の八つの章で，（自分でも認めているようにその一部において「高等的な（advanced)」ところにまで踏み出してはいるものの,）基本的には初等的な枠組みの中で巧みにそれぞれの要点と項目相互間の関係を紹介し，展開しています．

しかし本書において著者が意図するところは，（各章に「歴史的な雑記」と「哲学的な雑記」が付されており，多面的な情報や検討が与えられていますが,）これら八つの題目の概説的な紹介記事を読み物風に展開することではありません．そうではなく，著者が主張したい「初等数学」というべきものの現代的な位置づけを（いわば数学風に）展開することにあります．この和訳においては，著者がこのように意図するものを「初等的数学」という用語によって表すことにしました．（したがってまたそれを超え出るものを「高等的数学」としています.）その理由には次のような背景があります．この翻訳書が期待する我が国における読者層にはいろいろな段階で数学教育に携わっている多様な現場の人たちがあります．またその背後には，高等学校や大学への進学率がそれぞれにとても高い社会的な状況が生み出している数学教育の受け手の生徒たちや学生たちの多様性があります．こういった状況のもとで，本書の著者が主張する「初等的数学」こそが「初等数学」であると決めつけてしまうならば，かえって原著者の意図が削がれることにもなりかねません．彼は，かつて 100 年前にクラインが行った試みを受けて，21 世紀の今日における「初等数学」をめぐる発展的な論議を喚起しようとし，その基本的な骨格となるべきものを，今日に至る 100 年にわたる数学の爆発的な展開を踏まえたうえで提示しようとしています．そこでこの邦訳では「初等数学」という用語では，いろいろな状況に応じて多様性を持っている読者それぞれのイメージをそのままに尊重するものとします．そして読者が自分自身の状況に応じて一歩を踏み出して，「初等数学」についてのそれぞれの現場での必然性に根ざした論考を展開していくように期待します．

初等数学論考
John Stillwell 著･三宅 克哉訳
http://www.kyoritsu-pub.co.jp/bookdetail/9784320113343

また，著者は，「大学に入るばかりの学生たちに対しては，本書は，さらに先へと進むにあたって知っておくと役立つ事柄の全体像を提示するとともに，前方にあるものを垣間見るための助けになる」と自負していることも強調しておきます．例えば，本書はこういった学生たちの「自主ゼミ」での格好の教材になることでしょう．また彼らを送り出す側の教育者たちにとっても，生徒たちや学生たちの前途に広がる数学への展望を自らが保持することによって，その教育活動の柔軟性を増し，その即時的ではない効果をもたらし，そのさらなる豊かさを担保することになるでしょう．

本書で取り上げられている上記の新しい四つの題目について，著者が感じているその必然性（の一部）を手っ取り早く読者に感じてもらえるように，いくらかの具体的な内容をここで提示しておきます．

まず「計算」においては，数とそれを表示する十進数字や二進数字とを明確に分離し，数の四則演算と累乗とを数字を用いて展開することによって，取り扱う数字の桁数を基準としたそれらの計算量を評価します．これによって「多項式時間による計算が可能な問題の類 P」が定性的に捉えられ，例えば「大きい数が素数であるかどうかを認定する問題」がこの類 P に属することとか，その反面で，「大きい数を素因数分解すること」については，これが類 P に属するかどうかはまだ知られていないことを紹介します．それでも「ある数が与えられてしまえばそれがもとの大きい数の約数であるかどうかを判定すること」は数の除法を通して類 P に属することになります．このように「答えを見つけるのは難しいが具体例においてそれを確認することは易しい問題」は「NP 問題（非決定的多項式時間問題）」と呼ばれ，こういった問題が果たしてすべて類 P に属するかどうかを問うことは「P 対 NP 問題」と呼ばれています．ただし，この問いかけの大前提として，「計算」というものの数学的な定義が必要となりますが，これは「テューリング機械」によって，もちろん初等的に与えられます．

「組合せ」においては，二項係数とグラフ理論が扱われます．前者は「場合の数」という視点から「確率」と密接に関わることにもなります．コイン投げを繰り返し行う遊戯においては二項係数で表示される二項分布が現れ，そしてさらに，ある意味で「二項分布の極限」となっている正規分布との関係が「微積分」と共鳴するなかで検討されることになります．そこに至れば当然「無限過程」が表舞台に登場することになります．もちろん著者はすでに「微積分」においてそ

れなりの「無限過程」を自然に動機づけながら導入しており，「可能的無限」ないし「構成的無限」を初等的数学に含めるべきであるとします．これに対して，「実無限」となると，これはもはや初等的数学には属さず，著者はここにこそ初等的数学と高等的数学とを分かつ境界線が横たわっていると主張します．（たとえば，「いくらでも長い有限列が構成できること」と「無限列が構成できること」との間に本質的な差があることはあまり意識されていないようですが，一応注意を促しておきましょう．標語的にいうと「数学的帰納法によって無限列を創ることはできない」のです．）すなわち，古代ギリシャ，特にエウクレイデスの『原論』で展開されている「量の比の理論」に基づく「取り尽くし法」に拠った面積や体積の理論とその精神はそのまま初等的数学に収めるが，19 世紀に起こされて現在に続く「実数の連続性」そのものは初等的数学を超えて高等的数学に属するとするわけです．

著者はまた 20 世紀における重大な結果である「四色問題の証明」に注目します．四色問題は（有限）グラフ理論に移されて多様な場合分けによって検討が重ねられ，その証明は今のところ計算機の使用に本質的に依存せざるを得ないものです．著者はグラフ理論を初等的数学の基本要素とする必然性の一端をここにも見ています．また「無限鳩の巣論法」，すなわち，「無限個の対象を二分すればその一方には必ず無限個の対象が含まれる」という論法を無限二分岐木（binary tree）に移して「直感化」することによって「実無限」に踏み出します．「無限個の頂点を持ち，各頂点からは有限個の枝しか出ていない木（tree）には無限に伸びる単純な道（simple path）が含まれている」ことが「ケーニヒの無限性補題」によって保証されますが，著者はこれを拠り所として，高等的数学に属する「実数の連続性」への初等的数学からの緩やかな展望を提示します．初等的数学からさらにその前方を覗き見るにあたって，このようなやり方で「実数の連続性」を支える「実無限」が受け入れやすく導入されており，例えば（可算）選択公理を含む集合論を正面切って展開するような道筋は避けられています．

最後に「論理学」についても触れておきましょう．ここで本書の副題である「エウクレイデスからゲーデルまで」を思い起こしましょう．すでにエウクレイデスの『原論』についてはまず冒頭でも触れましたが，この著作が歴史的に大いなる影響を与え続けてきた大きい理由の一つに，そこに展開されている次のような特性があります．すなわち，いくつかの「公理」や「公準」から始めて論証を

重ね，結局は驚くべき結論を導き出して見せるというその構成です．基本的には現在の数学も，例えば「計算機に依存する証明」についての議論はあるでしょうが，そういった様式を遵守し，またさらなる改善を施して整備し，大いなる発展を遂げることになりました．「（数理）論理学」においては20世紀になって得られた大いなる成果とそれがもたらす「数学の本性」へのまったく新しい認識が生み出されました．本書ではその一端を担うゲーデルの「不完全性定理」と「完全性定理」への誘いを試みています．そのため，後者に対応すべく，数学における記述様式と論証の形態を解析して得られた記号論理の枠組みである「命題論理」と「述語論理」を解説しています．そして著者が高等的数学の領域に踏み出した第10章における解説で「これらの論理学それぞれの完全性」を示しています．すなわち，「命題論理ないし述語論理における必然的論理式（valid formula）はある種の手続きと推論規則を用いてそれぞれの内部で必ず証明される」ことが示されています．また「不完全性定理」については，すでに第9章で，初等数学の第一の項目に挙げられた「算術」についての公理体系として「ペアノ算術」を導入し，その「不完全性」についての解説を与えています．ただし，著者自身も，こういった部分はもはや初等的数学を踏み出して高等的数学に入り込んでいるものであると考えています．それでも，多くの読者が初等的数学を一歩踏み出したところに見られる生き生きとした現代数学の一つの表情に接し，そこにおもしろさを感じてくださるならば，それこそ，おそらくは著者の，また訳者の歓びとするところです．

なお，些細なミスや数学上の修正を断りなしに行っていますが，誤解を避けるために訳者が補足した部分は［ ］書きにしています．

最後になりましたが，この原書を見つけ出し，その翻訳を勧め，この形に仕上がるまでご尽力を注いで下さった共立出版社の大谷早紀さんに心からの謝意を記しておきます．

2017年11月15日
調布にて
三宅 克哉

Hartley Rogers Jr. の思い出に