

目次

第1章 初等的数学の諸項目 1

- 1.1 算術 2
- 1.2 計算 4
- 1.3 代数 7
- 1.4 幾何 10
- 1.5 微積分 14
- 1.6 組合せ 17
- 1.7 確率 22
- 1.8 論理学 24
- 1.9 歴史的な雑記 27
- 1.10 哲学的な雑記 35

第2章 算術 39

- 2.1 エウクレイデスの互除法 40
- 2.2 連分数 42
- 2.3 素数 45
- 2.4 有限算術 49
- 2.5 2次整数 51
- 2.6 ガウスの整数 54
- 2.7 オイラーの証明を再訪する 59

- 2.8 $\sqrt{2}$ とベル方程式 62
- 2.9 歴史的な雑記 65
- 2.10 哲学的な雑記 73

第3章 計算 80

- 3.1 数字 81
- 3.2 加法 84
- 3.3 乗法 87
- 3.4 除法 90
- 3.5 累乗 92
- 3.6 P 対 NP 問題 95
- 3.7 テューリング機械 99
- 3.8 *解答不能問題 103
- 3.9 *普遍機械 106
- 3.10 歴史的な雑記 108
- 3.11 哲学的な雑記 113

第4章 代数 118

- 4.1 古典的代数 119
- 4.2 環 125
- 4.3 体 130
- 4.4 逆元に関わる二つの定理 132
- 4.5 線型空間 136
- 4.6 線型従属, 基底, 次元 139
- 4.7 多項式の環 142
- 4.8 代数的数体 146
- 4.9 線型空間としての数体 149
- 4.10 歴史的な雑記 153
- 4.11 哲学的な雑記 157

第5章 幾何 163

- 5.1 数と幾何 164
- 5.2 エウクレイデスの角の理論 165
- 5.3 面積についてのエウクレイデスの理論 168
- 5.4 直定規とコンパスによる作図 175
- 5.5 代数的な演算の幾何学的な実現 178
- 5.6 幾何学的な作図の代数的な実現 181
- 5.7 線型空間幾何学 184
- 5.8 内積による長さの導入 188
- 5.9 作図可能な数体 192
- 5.10 歴史的な雑記 194
- 5.11 哲学的な雑記 202

第6章 微積分 212

- 6.1 幾何級数 213
- 6.2 接線と微分法 216
- 6.3 導関数を計算する 222
- 6.4 曲線で囲われた面積 227
- 6.5 曲線 $y = x^n$ の下の面積 231
- 6.6 *微積分の基本定理 234
- 6.7 対数関数のベキ級数表示 238
- 6.8 *関数 \arctan と円周率 π 247
- 6.9 初等関数 250
- 6.10 歴史的な雑記 255
- 6.11 哲学的な雑記 261

第7章 組合せ 266

- 7.1 素数の無限性 267

- 7.2 二項係数とフェルマの小定理 268
- 7.3 生成関数 270
- 7.4 グラフ理論 273
- 7.5 木 (tree) 276
- 7.6 平面的グラフ 278
- 7.7 オイラーの多面体公式 280
- 7.8 非平面的グラフ 287
- 7.9 *ケーニヒの無限性補題 289
- 7.10 シュベルナーの補題 293
- 7.11 歴史的な雑記 297
- 7.12 哲学的な雑記 300

第8章 確率 305

- 8.1 確率と組合せ 306
- 8.2 賭博師の破産 309
- 8.3 ランダムウォーク 311
- 8.4 平均値, 分散, 標準偏差 313
- 8.5 *ベル (鐘形) 曲線 317
- 8.6 歴史的な雑記 320
- 8.7 哲学的な雑記 324

第9章 論理学 327

- 9.1 命題論理 328
- 9.2 トートロジー, 恒等式, 充足可能性 331
- 9.3 特性, 関係, 量子子 334
- 9.4 数学的帰納法 337
- 9.5 *ペアノ算術 342
- 9.6 *実数 346
- 9.7 *無限 351

- 9.8 *集合論 356
- 9.9 *逆数学 360
- 9.10 歴史的な雑記 362
- 9.11 哲学的な雑記 367

第 10 章 幾つかの高等的数学 369

- 10.1 算術：ペル方程式 370
- 10.2 計算：語の問題 378
- 10.3 代数：基本定理 383
- 10.4 幾何：射影直線 388
- 10.5 微積分学：円周率 π のためのウォリスの積 395
- 10.6 組合せ論：ラムジューの定理 401
- 10.7 確率論：ド・モルガン分布 406
- 10.8 論理学：完全性定理 414
- 10.9 歴史的および哲学的な雑記 420

参考文献 435

索引 445