はじめに

本書はLebesgue積分の半期の授業の教科書である．Lebesgue積分の要点を基本的なものに限り，できる限り少ないページ数できちんと伝えるのが目標である．Lebesgue積分の広がりは独立した演習問題から学ぶ．Lebesgue積分を独習する人のために演習問題には解答をつけた．

Lebesgue積分入門にはEuclid空間上のRiemann積分の拡張としてLebesgue積分を導入し，それを一般の測度空間に拡張するアプローチと，最初から一般の測度空間にLebesgue積分を導入するアプローチがある．本書では後者のアプローチを採用した．Lebesgue積分の定義や収束定理には測度の可算加法性があればよく，Euclid空間のLebesgue測度の詳しい性質は不要だからである．このアプローチでは，同じような議論を繰り返す必要がなく，少ないページ数でLebesgue積分と収束定理にたどり着くことができる．

第1章では一般の Lebesgue積分の定義と収束定理およびその応用をまとめる．Lebesgue積分に必要不可欠な要点に絞り込んでいる．約50ページと少し長く見えるが，これは丁寧に記述したためである．半期の講義ではここまでが中間試験の範囲である．とりあえずこの最初の要点を理解すれば，Lebesgue測度の存在を信じることにより， Lebesgue積分を活用できるようになる．議論の背景にあるのは「〜から生成されるσ-加法族」である．このアイデアをこの章でしっかり自分のものにしておきたい．

第2章では外測度を導入し，Hopfの拡張定理によってLebesgue測度，直積測度を構成する．これによってFubiniの定理を正確に与えることができ，具体的な問題への応用が格段に広がる．正確な議論のためにはσ-加法族以外の集合族が必要になる．あまり多くの集合族の概念をもちだしても理解が困難になるので，ここでは単調族だけを導入する．

第3章では2変数関数としての可測性，Lebesgue 可測集合の近似，Lebesgue 非可測集合，Cantor 集合，Cantor 関数，Borel 可測と Lebesgue 可測の違いなど，少し進んだ内容を考察する．Lebesgue 積分を解析学に応用する際に非可測関数が現れることはほとんどないので初読の際にはスキップしてよい．

第4章は Lebesgue 積分の L^p 空間などへの応用である．Lebesgue 測度の存在と Fubini の定理を仮定すれば，第1章の直後に読むこともできる．早く応用に進みたければ第2章や第3章をスキップしてもよい．第1章の知識だけで取りかかれるところも多い．第2章および第4章の一部が期末試験の範囲となるであろう．Hölder の不等式に代表されるような各種不等式にはかなり技巧的なものもある．しかしそれらは Lebesgue 積分でなくても意味のあるものであり，すでに知っていることも多い．一方，本質的上限などは測度がなければ定義できないものであり，少し詳しく解説した．任意の測度空間で成り立つ L^p 空間の性質と Euclid 空間の Lebesgue 測度に関する L^p 空間固有の性質を区別して記述した．この章の最後に Weierstrass の多項式近似定理と複素解析への簡単な応用を与えた．

講義の際の小テストなどに使えるような基本的な問題を本文中に載せた．一方，演習問題は独立していて，そのレベルは単に当てはめるだけのものから，本来ならば本文中の定理とするようなものまで幅広い．Clarkson の不等式のような有用な結果も紹介している．内容によっておおまかに分類してある．演習問題はどこから始めてもよい．途中でやめてもよい．基礎知識の不足に気がついたら，その時点で本文に戻ればよい．演習問題に解答をつけることの是非はある．読者の考える余地を奪ってしまうのではないかと？ しかし，積分論の骨組みだけから独力で自分の解答を作り上げるのは難しい．とくに集合族を利用して測度や積分の性質を導くところなどは習わなければ気がつかない．習うべきものは習って，新しい問題に挑戦すればよい．本書の解答例がベストであるとは限らない．自分に納得のいく解答を考えてほしい．

Lebesgue 積分は細かい議論の積み重ねでできており，ついつい引用を繰り返しがちである．しかし，引用が重なると理解が困難になる．定義・定理から例題にいたるまで小見出しをつけ，番号による引用は極力避けた．また，他書を参照しなくて済むように，有理数の稠密性，上極限・下極限などを第5章で補足した．

2018年7月　　　　著者