確率変数の収束と大数の完全法則―少しマニアックな確率論入門―
服部 哲弥著
https://www.kyoritsu-pub.co.jp/bookdetail/9784320113503

# まえがき

基礎的な教科書を書く話が持ち上がるたびに悩むことだが，伝統的な分野はどこもそうそうたる著者陣による多くの教科書が出版されているので，基礎事項という教科書の縛りと変わった 1 冊としての新たな特徴の調和は難しい．とはいえ，多くの小説が批評家よりも広い読者に向けられることを考えると，数学の心得がある読者が物語のような数学書を読む需要は常にあるかもしれない．ちょうど 4 年前の誕生日に共立出版編集部の大越隆道さんが研究室にお見えになって以来，何か提案できないかと考えた末に，大数の法則をテーマにして，そこに向かって初等的な確率論の教科書に共通する内容とその先の基礎事項のうち抜け落ちがちなもののいくつかを配置することを考えた．

大数の法則は，偏差のランダムな正負の打ち消し合いという，解析学としての確率論らしさの原点である．本書は大数の完全法則の証明を紹介する．よく知られた大数の強法則の特別な場合についてやや強い結論を導く定理であり，定理と英語名は 70 年前からある．基礎教科書では，大数の強法則について 4 次モーメント有限という強い仮定を置いて短い証明を採用することがあるが，その証明は完全法則の証明の中に位置づけるほうが自然である．応用上も，現実の観測や測定結果は有限個のばらつく量であって，その平均を極限の確定値で近似する．個数が固定していて異なる個数の系との関係を考えないので，その数学的なよりどころは大数の完全法則である．

本書は通常の測度論に基づく確率論，特に実数値の独立確率変数列で書ける範囲を扱う．最近の初等教科書では省略傾向にあるようにも感じる確率変数列の収束の定義の差異を含めて，基礎事項を紹介する．直感的な理解でも対処できる初等的な議論に徹したつもりだが，たとえば [8] は定義と定理を

押さえつつ証明を省く工夫によって，最短距離で予備知識を確認するのに使える．

本書後半では，独立同分布実確率変数列の分布関数の算術平均（経験分布関数）が母分布の分布関数に一様収束するというグリヴェンコ・カンテリの定理の証明の完全収束版を単調関数値に一般化して紹介する．この関連で有界変動関数の基礎事項に立ち入る．ルベーグ積分の著名な基礎教科書 [21] の「直線上の絶対連続関数」の節で，有界変動関数の基礎事項を [18] から引用しているが，後者が新版に変わった際にギャップが生じ，学生諸氏から質問を受ける経験が複数あった [12]．現代の基礎教科書からこぼれ落ちがちな基礎事項のいくつかを違った形で残しておくことも本書の動機である．

グリヴェンコ・カンテリの定理は実確率変数列の大数の法則と形の上では類似するが，非可分空間値独立確率変数列という概念の困難が統一の障害になる．1 つの試みの手がかりとしてヒンチンの不等式の一般化は，大数の法則の正負の打ち消しという描像のセミノルム付き線形空間における対応物と見ることができて，初等的に扱えるので，これを紹介する．この説明のため本書後半は線形空間のややマニアックな入門から始める．一般化グリヴェンコ・カンテリの定理の証明だけに関心がある場合は，ヒンチンの定理とその一般化 $K'_{U,r,q}$ などを表題に含む節は飛ばすことができる．

確率論の初等的な教科書を勉強した後に，深入りするための 1 つの偏った数学的動機となることを期待する．また，線形代数を含めてかつて勉強した数学を再び勉強するに当たって，少し変わった内容が読みたいが，いきなり専門的教科書や研究論文の水準は敷居が高いという需要へのやや変わった答えにもなることを期待する．

本書の内容と構想のヒントになるきわめて多くのことを竹居正登さんに教えていただいた．深く感謝する．原稿にも多数のご指摘をいただいたが，残っている誤まりなどはもちろん筆者の責任である．

大越さんはじめ共立出版の皆様には，前回出版していただいた [10] の折から長くお世話になっている．学術と出版を取り巻く厳しい状況の中で新しい書の刊行を引き受けて下さったことに深く感謝する．

2018 年 9 月　服部哲弥

# （あとがきを兼ねた）専門家へのまえがき

以下は基礎教科書としてはおそらくあとがきの内容だが，あとがきと目次を読めば本文がわかる読者にあとがきを探す手間を省いていただくために背景文献一覧を兼ねてここに置く．

いわゆる大数の強法則も本書で紹介する完全法則も算術平均の概収束，すなわち，確率空間上の関数の偏差の和と項数の比が確率 1 の各点で 0 に収束することを言うが，強法則の和は部分和が対応する項数の和に等しいのに対して，完全法則は部分和自体が独立な場合も 0 に収束することを言う．たとえば大数の強法則を 4 次モーメント有限の場合に限ると短い証明ですむことにその痕跡が見える．

大数の完全法則の定義を初めて与えた [19] は分散有限な実数値の独立同分布確率変数列で大数の完全法則が成り立つことを証明し，[4, 5] は分散有限が同値条件であることを証明した．前者は特性関数の評価に基づいて証明したが，後者はモーメントの級数評価による別証明を与えた．本書は前半で後者の Erdős による大数の完全法則の証明を紹介する．古典ながら和書での紹介が少なく見えるので書き留めることにしたが，前半は基礎事項なので飛ばし読み可能である．

偏差の算術平均は線形演算なので，大数の法則を実数値独立確率変数列から線形空間値に一般化したくなる．可分 Banach 空間値独立確率変数列の大数の強法則は成書 [23] がある．可分性を用いて可算集合値独立確率変数列に帰着するので，完全法則も（成書は見当たらなかったが）同様にできようが，非可分空間値は冒頭から枠外である．非可分空間値独立確率変数列の収束の測度論の枠内で定式化，言い換えると，非可分空間の直積ボレル測度の構成に困難があることは，たとえば [1] に指摘がある．同書は，実数上の右連続左

有極限関数の集合で一様評価のノルムを考える非可分空間の基礎的な例において，Skorokhod 距離に変更して可分空間化する周知の回避策を採用する．逆に，一様評価のノルムを可測性よりも優先して，外測度と外積分からやり直す Hoffmann–Jorgensen の流れにたとえば [24] の成書がある．

数理統計学の古典的定理の 1 つである Glivenko–Cantelli の定理は関数列の和の一様収束を扱う極限定理だが，非可分ボレル可測空間に基づく独立確率変数列は扱わず，ノルムをとった結果は実確率変数であるような定式化なので，前段落の問題はない．この定理は確率論の極限定理ではあるけれども確率論の基礎教科書では見かけないが，本書では完全収束版に強化して単調な関数に値をとる場合に一般化して紹介する．一様評価のノルムで完全収束という強い収束があると，そこからの数学的な摂動論によって，より複雑な系の大数の法則が証明しやすい [11, 13, 14, 15, 16].

線形空間値確率変数という枠組での統一は困難があるが，線形空間における正負の打ち消しに限定すれば，実数の集合 $\mathbb{R}$ と単調関数の空間には一般化した Khintchine の不等式という共通の性質がある．Khintchine の不等式は実数列の各項の正負についての算術平均を 2 乗の和で評価する線形空間としての $\mathbb{R}$ の性質である．この不等式から，偏差の和の正負の打ち消しの分散の和による評価という大数の完全法則の本質を意味する，Marcinkiewicz–Zygmund 不等式が導かれる．本書後半では Khintchine の不等式を一様評価のノルム付き有界変動関数の空間 $BV(\mathbb{R})$ を含む形で一般化して暫定的に $K'_{U,r,q}$ と名付けた．$K'_{U,r,q}$ の添字において $U$ は単調関数の部分集合が役割を果たすことを意味し，$r > 1$ が偏差の正負の打ち消し合いの効果を意味する．中心極限定理が示唆するのは $r = 2$ だが，$1 < p < \infty$ なる $L^p$ ノルムに対して自然に得るのは $r = p \wedge 2$ である．$q$ は和の $q$ 乗の平均を評価する意味だが，MOBD を有限 Rademacher 列に適用することで，集中不等式を得て，ある $q$ で $K'_{U,r,q}$ が成り立てば任意の $q$ で成り立つことが言える．確率論の初等教科書からこぼれ落ちがちに見える基礎事項のいくつかをこの形で含めた．

最終章では，一般化した Khintchine の不等式からどの程度の数学があれば大数の完全法則と呼びうる統一的な扱いを得るかについて考察する．結果は隔靴掻痒感があるが，選択と集中の時代に，はやらないように見える初等事

確率変数の収束と大数の完全法則―少しマニアックな確率論入門―
服部 哲弥著
https://www.kyoritsu-pub.co.jp/bookdetail/9784320113503


項のマニアックな抽出整理を細々と残す意義を期待することにした.

なお，副題に見覚えのある向きに，[17] は従属性が大数の法則にもたらす劇的な変化を扱う名著，本書は独立確率変数列にとどまる門前編である.