序

> 子供たちのゲームは単なるゲームではないことに注意しなければならない．それは，彼らにとって最も真剣な営みであると考えるべきである．
>
> ミシェル・エケム・ド・モンテーニュ

本書では，純粋に戦略のみに基づくゲームを扱います．このゲームは，二人の対局者[原註 1]が交互に手を打ち，サイコロや切り混ぜたカードといった偶然に左右される道具は使わず，対局者は現在のゲームの局面についての完全な情報をもつというものです．おなじみのゲームでは，**3 目並べ** (TIC TAC TOE)，**点と箱** (DOTS & BOXES)，**チェッカー**および**チェス**がこれに属します．**ジンラミー** (GIN RUMMY) のようなカードゲームや**バックギャモン**のようなサイコロを使うゲームは，明らかにこれに属しません．**海戦ゲーム** (BATTLESHIP) は，交互に手を打ち，偶然に左右される要素はありませんが，相手の戦艦の位置に関する完全な情報が与えられていません．本書で論じるゲームは，経済学や生物学に現れる一般的な**ゲーム理論**が扱うゲームと区別するために，**組合せゲーム**と呼ぶことにします．

歴史的には，ゲームの数学的研究は非常に単純なゲームを個別に分析したものがほとんどでした．これは 1930 年代にスプラーグ-グランディ理論が初めて一般的なゲームの研究の数学的基礎を与えるまでつづきました．1970 年代には，コンウェイ (John H. Conway) による “*On Numbers and Games*” およびバーレカンプ (Elwyn Berlekamp)，コンウェイ，ガイ (Richard K. Guy) による “*Winning Ways*” という 2 冊の大著によって完全で深遠な理論が確立され，広く知れ渡りました．この理論を用いると，無数のゲームを解析することができます．この理論の拠りどころの一つとして，コンウェイが正規形ゲームに導入したゲームの**直**

[原註 1] 1972 年に，まだ学部学生であった著者の一人にコンウェイが発した最初の言葉は，3 人ゲームをほのめかす「1 + 1 + 1 はいくつか？」でした．まだこの質問に対する満足な答えを得ていません．

和 (*disjunctive sum*) の概念があります．この枠組みは，とくにいくつかの構成要素に自然に分割できるゲームに対して有効です．“*On Numbers and Games*” は，この数学的な考え方を洗練された仕方で記述しています．“*Winning Ways*” は，多くの駄洒落や気の効いた言い回しとともに，実際に遊べるゲームを通してこれらの考え方を展開しています．どちらの本もおびただしい数の新しい考えを含んでいて，本書の著者らも数学研究全体に渡りこれらの本およびその著者の優しい言葉や指導に負うところが大きいことを明記しておきます．

本書の狙いは，これら 2 冊の大著と比べれば小ぢんまりとしていますが，正規形の有限二人ゲームを評価するための指針を与えることです．この指針は，理論と実践によって紡がれます．

この理論は，代数と離散数学を多少理解した学生なら誰でも取り組むことができます．一般的な読者として大学の専門課程の学生を想定していますが，多少の支援があれば優秀な高校生でも話の展開についてこられるはずです．内容はできるかぎり本書のなかで完結するように努力しましたが，第 8 章および第 9 章の証明のいくつかは省略しました．これは，その理論が複雑すぎる，またはその理論が現在も発展途上だからです．実際のところ，執筆の最後の数カ月で，全微小 (*all-small*) ゲームの類に対する記法を変更するようコンウェイに説得されました．本書で初めてお披露目することになったこの**昇進** (*uptimal*) 記法はとても便利です．

本書では，理論の合間に具体的なゲームや練習問題をちりばめています．ゲームを理解する一つの方法は，誰かにそれを説明してもらうことです．しかし，もっとよい方法は，実際にいくつかの駒を並べてよく考えてみることです．そして一番よい方法は，誰かとそのゲームを対局してみることです．一般的にゲームを完全に解くのはむずかしいことですが，ゲームに現れるいくつかの局面だけに対する解法を示すことはできます．本書の執筆を通じて，筆者らはゲームの解法よりも多くのゲームを発明しました．多くのゲームは，そのやり方を本文中に示しましたが，本文中で示せなかったゲームの規則については巻末に規則集として付記しました．章を読み進むに従って，理解度を確かめるためにも，自分自身でゲームを考案してそれを解いてみることに取り組んでください．

“*On Numbers and Games*” および “*Winning Ways*” が発刊されてから，組合せゲームだけの研究集会がいくつも開催されてきました．この研究領域はますます発展していて，本書でもそのいくつか成果を紹介しています．しかし，興味のある読者は，同形反復のあるゲーム，逆形ゲーム，ゲームの（直和でない）和および計算機科学からのアプローチなどについて調べるためには，いろいろな文献を読む必要があ

るでしょう．その出発点として，これらの会議録 [Guy91, Now96, Now02, FN04] をあげておきます．

本書の構成

本書で取り上げる組合せゲーム理論の中心にある考えは，それぞれのゲーム（の局面）にある値を割り当てることです．この値は，どちらが勝ち，どのような必勝戦略があるかを決めるときに実際のゲームに置き換えて用いることができるものです．

それぞれの章の冒頭に掲げた序節では，生徒に対しては，それにつづく本文中で用いる数学の準備となる問題を提示します．また，指導者に対しては，その章で用いる題材からどのように話題を展開していくかについての指針を示します．

練習問題は，それぞれの章全体にちりばめられていて，それらに先立つ題材の理解を補強および確認することを意図しています．理想的には，出会ったすべての練習問題を解こうと試みるべきですが，歯が立ちそうもない問題については付録にある解答を参考にしてもかまいません．それでも疑問が十分に解消しないのであれば，組合せゲーム理論の**専門家**に相談すべきかもしれません．

第 0 章では，基本的な定義を行い，組合せゲーム理論における本書の大まかな位置づけを示します．第 1 章では，ゲームを対局および解析するための一般的な戦略を示します．これはそれほど多くのゲームを行ったことのない人にも役立つでしょう．そうでない人は，これを流し読みして，残りの章を読み進めるなかで必要に応じて読み返すとよいでしょう．第 2 章，第 4 章および第 5 章は，主として汎用的な数学理論を含みます．第 2 章は，ゲームがどの類に分類され，どの局面ではどちらが勝つのかを決定するこの理論の最初の主要結果を紹介します．興味深いことに，いくつかのゲームの構造については，そのゲームがどの類に属するかだけでかなりのことがわかります．第 3 章は，そのあとの章で展開する理論への方向づけをします．第 4 章，第 5 章および第 6 章では，この理論を展開，つまりゲームに値を割り当て，それらの値の重要性を示します．

第 7 章，第 8 章および第 9 章では，組合せゲームの世界の特定の分野を掘り下げて，結果としてこれらが実際のゲームとより密接に結びつくことでさらに魅力的で具体的なものとなります．第 7 章は，**不偏** ($impartial$) ゲームについて調べます．不偏ゲームの研究は，全体の理論より先行して研究されてきました．これを新しい文脈のなかに位置づけて，現在の研究においては新しいゲームの類をなすことを示します．第 8 章は，**熱い** (hot) ゲームを取り扱います．熱いゲームは，

囲碁や**アマゾン** (AMAZONS) のように先手番が非常に有利なゲームです．この分野には多数の研究があるので，本書ではこの題材を紹介するだけにとどめます．第 9 章は，**全微小** (*all-small*) ゲームを解析します．この研究の大部分は，不偏ゲームおよび熱いゲームに重点が置かれています．この領域はまだまだ発展中で，本書では組合せゲーム理論における新たな発展という観点から，独創的で最新の結果を紹介します．

第 ω 章は，本書で紹介できなかった現在活発に研究が行われているいくつかの分野を簡単に紹介します．

付録 A では，降下型 (*top-down*) 帰納法について説明します．本書ではこの帰納法を頻繁に使います．生徒はこの付録 A を最後まで読む必要はありませんが，最初のいくつかの節を読むと，本書で用いている帰納的証明の枠組みと基礎について理解する助けとなるでしょう．

付録 B では，ゲームを代数的に取り扱うことのできる，アーロン・シーゲル (Aaron Siegel) が Java で書いた強力なプログラミング部品である CGSuite を紹介します．数学者や物理学者には Maple や Mathematica があるように，組合せゲーム研究者には CGSuite があります．読者は本書を読み進めるのに CGSuite を使う必要はありませんが，このプログラムは，直感を整理し，手作業で再確認し，仮説を立て，退屈な計算を繰り返すという作業を軽減してくれます．

付録 D では，本書に現れるゲームの規則を示します．これらのゲームは，いくつかの文献中にも見つかります．必ずしも本文中でゲームの規則を述べているわけではありませんので，読者はしばしばこの付録を参照する必要があるでしょう．

本書を補完するためのインターネットサイト www.lessonsinplay.com を用意しました．そこには，関連サイトへのリンク，プログラム，補遺および指導者がオンラインの解答集を入手するための手順があります．

謝辞

私たちは，本書の著者として名前を連ねてはいますが，主たる貢献者と主張するつもりはありません．本書は，多くの人びとが作り上げた数学的に豊かな環境から生みだされました．同僚や友人たちの最善の努力にもかかわらず誤りがあった場合の責は，最終的に本書を執筆した私たちにあります．

この領域における多くの貢献者は本文中に示しています．また，本文の内容に貢献および改善してくれた多くの方々は，特別な感謝に値します．とくに，本書

を完成させるのを励まし，時には追いかけまわしてくれたエルウィン・バーレカンプ，ジョン・コンウェイおよびリチャード・ガイには感謝します．本書が，新しい世代の熱烈な研究者を生み出す一助になれば幸いです．

本書の中心となる題材および議論は，多くは “*Winning Ways*” および “*On Number and Games*” にある題材を再構成したものです．いくつかの証明，とくに**数避** (*Number-Avoidance*) **定理**の証明は，グロスマン (J.P. Grossman) のものを採用しました．アヴィーズリ・フランケル (Aviezri Fraenkel) は，第 2 章の冒頭に述べる**組合せゲームの基本定理**に貢献しました．ディーン・ヒッカーソン (Dean Hickerson) は,「すべての誘因が負となるゲームは数になる」という定理 6.19(154 ページ) を証明するのを助けてくれました．ジョン・コンウェイは，第 9 章に昇進 (*uptimal*) 記法を採用するように何度も働きかけてくれましたが，彼の示唆するところの知見を理解するのにいくらか時間を要しました．エルウィン・バーレカンプおよびデビッド・モルナー (David Molnar) は，素敵な問題をいくつも提供してくれました．学生であったポール・オッタウェイ (Paul Ottaway)，アンジェラ・シーゲル (Angela Siegel)，メガーン・アレン (Meghan Allen)，フレイザー・スチュアート (Fraser Stewart) およびニール・マッケイ (Neil McKay) は，本書の一部を通読し，間違いおよび曖昧な表現を修正して有益な意見をくれました．エルウィン・バーレカンプ，リチャード・ガイ，アヴィーズリ・フランケルおよびアーロン・シーゲルは，技術的な内容を含む多くの章を編集してくれました．クリスティン・アイケンヘッド (Christine Aikenhead) は，言葉使いを修正してくれました．ブレット・スティーヴンス (Brett Stevens) およびクリス・ルイス (Chris Lewis) は，本書の一部を読んで意見をくれました．スーザン・ハーシュバーグ (Susan Hirshberg) は，本書の命名に寄与しました．

巨大な国際的出版社が趨勢を占めるこの時代に，A K ピータース (A K Peters) は，一緒に仕事をするのに魅力的でわくわくする出版社でした．私たちは，彼らが出版業がなんたるかを十分に理解していて，儲けよりもすばらしい作品の普及に力を注いでいることを確信しています．

そして，愛情をもって支えてくれた私たちの伴侶と，本当の遊びが何であるかを教えてくれたリラ (Lila) およびトヴィア (Tovia) に感謝します．