

## まえがき

二つの整数を足すことは、我々が数学において学ぶ最初の事柄の一つである。加法はなすべきこととしてはどちらかという簡単なことであるが、それはほとんどただちに、数への興味をもつ好奇心の強い人の心にあらゆる種類の奇妙な疑問を引き起こす。これらの疑問のいくつかは序論の3ページ目にリストとして列挙されている。本書の第一の目的はこれらの疑問とそれに関連した問題、そしてまたその問題から生じる定理をゆったりとしたやり方で探求することである。読者は序論において、主要な事柄のより詳細な議論を読むことができるだろう。

正確であることは数学の本質である。そして正確さの欠如は混乱を導くだけである。たとえば、我々の題辞の一つとして引用された、『ユリシーズ』からのブルームの黙想における一つの失敗のように、それは正確な言葉を用いて、彼の数学的主張が無意味に見えるように、全体の意味を与えている失敗の例である。

しかしながら、それらは次のように説明される。「2に2を掛けて半分で割ると1の2倍になる」とは  $\frac{2+2}{2} = 2 \cdot 1$  を意味している。なぜなら、ブルームは彼が「半分で割る」という曖昧な表現法を使ったとき、「半分に切る」ことを意味していたからである。一方、「 $1 + 2 + 6 = 7$ 」は音程に関連している。すなわち、同音、2度音程、そして6度音程を足すと、その結果は実際7度音程になる。ブルームは彼自身、人は自分が何をしているかということの明確な兆候を隠すならば、このことは手品を使っているように見えるかもしれない、ということに気づいている。

ブルームには自分自身に話しているという満足感がある。本書では、過剰に知識をひけらかすことなく、明晰かつ正確であるように努力しよう。それがどの程度成功したかどうかを決定するのは読者である。明晰かつ正確さに加えて、厳密に論理的な証明が数学の特徴である。本書におけるすべての数学的な主張は証明することができるが、その証明はしばしばあまりに複雑な

ので詳細に議論することができない。教科書や研究小論文において、このようなすべての証明は与えられるだろうし、あるいは、それらの証明が見出される文献の指示がなされる。本書では、読者は私たちの数学的主張のすべてはすでに確認された証明がある、ということに信頼していただきたい。

本書は、数学的なりテラシーのある一般的な読者のために書かれた我々の数論に関する書籍の三冊目にあたる。(後で、「数学的に読み書きのできる」と言うことによって意味しているところを正確に説明しよう。) 最初の二冊の本は *Fearless Symmetry* (2006) と *Elliptic Tales* (2012) である。最初の本はフェルマーの最終定理 (FLT) のようなディオファントス方程式における問題を議論している。二冊目の本は、バーチスウイナートン・ダイアー予想 (Birch-Swinnerton-Dyer Conjecture) のような楕円曲線に関連した問題を議論している。これらの本のどちらにおいても、高度な話題であるモジュラー形式についてはものたりない記述で終わっている。このモジュラー形式という概念は数論におけるこれらの両分野において決定的な役割を果たしている。上記に述べた我々の両書の最終章にたどり着く頃には、非常にたくさんの概念をすでに紹介しているので、モジュラー形式の理論については単にほめかすことしかできなかった。本書の目的の一つは第 III 部において、第 I 部と第 II 部において検討した種類の問題により動機づけられた、モジュラー形式のもう少し余裕のある詳細な説明を与えることである。

我々の三部作のそれぞれの本は互いに独立に読むことが可能である。本書の最初の第 I 部と第 II 部を読んだ後に、非常に熱心な読者は、本書の第 III 部と連携することによって *Fearless Symmetry* または *Elliptic Tales* を読むことから何か得ることがあると思う。というのは、それらは第 III 部の最後に扱われている、モジュラー形式について学ぶための意欲をさらに提供するからである。もちろん、このことは必ずしも必要なことではない— 第 I 部と第 II 部で学んだ数論的な問題はそれらだけで自然にモジュラー形式へのより動機づけをもった学習に導くであろう。

本書の三部構成は、数学的な背景のさまざまな段階の読者に対して計画されている。第 I 部は高校程度の代数学と幾何学を必要とする。いくつかの必要不可欠な節を除いて、より程度の高い数学的知識は必要ではない。説明のいくつかは複雑でかつしばしば長たらしい代数的な計算の連鎖を含んでいる。

この部分は読者が望む場合は飛ばしてもよい。第 II 部を読むためには、大学初年度の標準的な微分積分学のかんりの内容に出会うことになるだろう（ほとんどは、無限級数や微分、そしてテイラー級数）。また、読者は複素数についても知っている必要があるのだから、それらを簡単に復習する。第 III 部は特に追加的な数学的知識は必要ではないが、説明の全体を通して読む忍耐のひとときが必要であるかもしれない。

さまざまな章と節の難易度はしばしばかなり変動する。読者にはそれらを任意の順序で拾い読みすることをお勧めする。必要ならば、常にその詳細を埋めるために飛ばした章や節に戻って確かめるとよい。しかしながら、第 III 部においては、おそらく順序にしたがって読むほうがもっとも理解しやすいであろう。

人間が成し遂げたことは我々を驚嘆させ続けている。それは、 $1$  たす  $1$  は  $2$  で始まり、 $2 + 2$  は  $4$  になり（我々が確実に知っている単純な真理の決まり文句の例は真である）、さらに、はるかに越えて今なお活動的に進展している研究領域である数論の世界に赴くことができる。読者には、以下のページに続くこれらのすばらしいアイデアのいくつかをお見せしようとする、我々の試みを楽しんでいただくことを希望する。

## 謝辞

プリンストン大学出版に所属する無名の読者に感謝したい。かれらは本書のテキストを改良するために大変有意義な提案をしてくれた。数学的な助力に対して Ken Ono と David Rohrlich, 哲学的な助力に対して Richard Velkly, 編集的な助力に対して Betsy Blumental に感謝する。本書のデザインと製作に対して, Carmina Alvarez と Karen Carter に感謝する。いつものように我々の編集者 Vickie Kearn に彼女のつきることのない激励に対して大きな感謝を表したい。