はじめに

作用素環と物理との関係を考える際にまず挙げるべきは von Neumann の存在である．そもそも，量子力学の誕生を間近で見ていたヒルベルト周辺の人たちは，その数学的構造・定式化にも強い関心を寄せていて，数学の立場からの量子力学の教科書が間を置かずに出版された．Weyl (Gruppentheorie und Quantenmechanik, 1928), van der Waerden (Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik, 1932), そして von Neumann (Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, 1932) である．とりわけ von Neumann は作用素解析の観点から，量子力学の数学的構造を Dirac のそれと相補う形で記述して見せた．それはヒルベルト空間の内積構造を前面に出したもので，その確率解釈を観測結果との繋ぎ手として今に至るまでその裏付けがますます強固に蓄積され続けていることは周知の通りである．

von Neumann はまた，この量子力学の定式化と前後して，個々の作用素解析をこえた作用素の集団的な構造に注目し，その代数構造の解明に努め，Murray の協力の下，いまでいうところのフォン・ノイマン環の理論を 10 年程度で作り上げた．その物理的な動機は明示されなかったものの，有限自由度系で大成功を収めた作用素解析的手法が抱える無限自由度系での困難を見越してのものだったように思われる．von Neumann 自身は直接関わることのなかったこの無限自由度系（場の量子論と量子統計力学）にまつわる数学的構造は，その後 Segal, Wightman, Haag 等の手を経て，代数的量子場理論などの形に発展して今に至っている．一方で，von Neumann が先鞭をつけた作用素環の理論は，その後非可換幾何学的視点をも取入れる形で独自の発展を遂げ，様々な作用素環の分類理論を誘発するなど，こちらも滞ることなく発展を遂げていると言えよう．ただ，初期の作用素環研究者が常に意識していたであろう無限

自由度系とのかかわり合いは，現状，双方の発展の大きさに比して希薄になりつつあるようにも見える．再遭遇の期待されるところではある．

こういった状況認識の中，この作用素環と量子力学という二つのキーワードを冠した入門書の企画があることを知り，最初は正直その大胆さに驚くとともに，よもや，そういったことに携わることになるとは思いもよらなかったのであるが，将来的な再遭遇に備えて作用素環の基礎をまとめおくことくらいは出来得るか，と思い直し，しかしやはり後悔の念がいやますほどに，関係者の寛大な応対・励ましに支えられ，ようやく辿りついたのが以下の内容である．

ただ，著者自身の無知と偏見により，その可能性のある項目のいくつかは省かざるを得なかった．その一つが，C*環における K 群の理論で，これは，その物理との接点を入門的な範囲で解説することの個人的な困難さに鑑み断念した．あと，フォン・ノイマン環の分類についても（I 型と非 I 型以外）全くと言ってよいほど触れていない．一方で，積分論的な部分は，それなりに詳しく述べた．これは，再遭遇が起こる可能性が高いのは作用素環の表現論的な部分においてであろうという個人的な予感によるものである．その判断が正しいかどうかは保証の限りではないが．量子物理につらなる確たるものとしては，正準交換関係と正準反交換関係に付随した環とその表現（といっても，ほぼ相互作用がないフォック表現の周辺）についてひとしきり解説した．無限自由度の代数系として，これも再遭遇の端緒になり得るものとの見立てによるものである．

予備知識は，ルベーグ積分も含めた関数解析の基礎と代数系（群，環，加群）の基本といったところで，その一部は付録にまとめておいた．付録には，基礎から外れた内容で必要になるものも，こちらの方は証明を含めて収めてある．通常は関数解析に含まれる作用素のスペクトル分解についても，本文の中で可換 C*環の表現のついでに賄っておいた．ということで，前提とする部分はそれなりにあるものの，そこから先はこの中で閉じるよう試みた．これ一冊をもって，島とか山に籠り親しむこともできる，はずである．

本書を著す機会を与えてくださった谷島賢二先生に感謝いたします．共立出版の三浦拓馬氏をはじめとする担当の方々には技術的な面も含めてお世話になりました．植田好道氏には原稿の段階でいろいろとご指摘賜わりました．あわせてお礼申し上げます．最後に，長きにわたり適度な圧も含めて支え続けてく

れた内なる編集者たる弘美にありがとうの言葉とともに，

汲めども尽きぬ量子の泉，その味わいをこそ．

8年目のきさらぎの望月のころ

山上　滋

用語と記法について：

- 自然数には 0 も含めて $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ とする．
- 「一対一に対応する」の意味で「対応し合う」ともいう．
- 集合 X における恒等写像を 1_X で表す．また，部分集合 $S \subset X$ の支持関数 (indicator) も 1_S で表す．どちらの意味であるかは状況で判断．
- 互いに重なりのない和集合を $A \sqcup B$ のように表す．
- 変数 x を含む命題 $P(x)$ と変数の動く範囲 X に対して，すべての $x \in X$ に対して $P(x)$ が成り立つ，という主張を $P(x)$ $(x \in X)$ と略記する．
- 記号 [ ] は，状況によりいくつかの意味で使われる．
  (i) [条件] で，条件を満たす集合を表す．
  (ii) 対象 O の支え (support) を $[O]$ と書く．例えば，O が位相空間上の関数であれば $[O]$ は $[O \neq 0]$ の閉包を意味し，ヒルベルト空間の部分空間であれば閉部分空間 $\overline{O}$ への射影を表す．
  (iii) 同値関係についての同値類，同じことであるが商集合の元を表す．
- 共役線型 (conjugate-linear) は反線型 (anti-linear) ともいう．
- ノルム空間 X において，原点を中心とし半径 $r > 0$ の閉球を $X_r = \{x \in X; \|x\| \leq r\}$ で表し，X の双対バナッハ空間を X^* と書く．また，$x^* \in X^*$ の $x \in X$ での値 はしばしば $\langle x, x^* \rangle$ とも書く．X 上の線型汎関数 $\langle x, x^* \rangle$ $(x^* \in X^*)$ をすべて連続にする最も弱い位相を X の弱位相，X^* 上の線型汎関数 $\langle x, x^* \rangle$ $(x \in X)$ をすべて連続にする最も弱い位相を X^* の弱*位相という．$X^*_r = (X^*)_r$ は直積空間 $\prod_{x \in X_1} \mathbb{C}_r$ の閉集合
$$\left\{x^* \in \prod \mathbb{C}_r; x^*(\alpha x + \beta y) = \alpha x^*(x) + \beta x^*(y), x, y \in X_1, |\alpha| + |\beta| \leq 1\right\}$$
と同一視されるので，チコノフの定理（コンパクト空間の直積はコンパクト）により弱*コンパクトである．
- $t_1 \vee \cdots \vee t_n$ と $t_1 \wedge \cdots \wedge t_n$ は順序集合（束などの）での最大元・最小元の他に，対称テンソル積と交代テンソル積（グラスマン積）を表す．
- 順序に関連して，正または零のことを非負 (non-negative) というのが業界の慣わしであるが，以下では，実数以外の場合（正確には，負の否定が正または零に一致しない場合），零も含む意味で正 (positive) を使う．例：

正作用素，正汎関数.

- 正数の集まり $(a_i)_{i\in I}$ に対して，その総和を次で定める.

$$\sum_{i\in I} a_i = \sup\left\{\sum_{i\in F} a_i; F \text{ は } I \text{ の有限部分集合}\right\} \in [0,\infty].$$

- ベクトル空間の部分集合 S から生成された部分空間（S の線型包 linear hull）を $\langle S\rangle$ と書く．一方で $\langle\cdot\rangle$ という記号は，確率論的な意味での期待値も表す.
- 写像 $\phi : X\times Y\to Z$ に対して，ϕ の像 $\phi(X\times Y)$ を $\phi(X,Y)$ のようにも書く．一方，X, Y, Z がベクトル空間で ϕ が双線型であるときには，$\phi(X,Y)$ を $\langle\phi(X\times Y)\rangle$ の意味で使うことが多い.
- 位相空間が可分 (separable) であるとは，可算部分集合で密なものが存在すること．可算生成である (countably generated) とは，可算個の開集合の集まりがあって，全ての開集合がその中のいくつかの和集合として表されること．可算生成であれば可分であり，距離空間では逆も成り立つ.
- 有向集合 (directed set)，順序集合でどの有限部分集合も上界をもつものをいう．網 (net) とは有向集合で添字付けられた収束性を議論する対象の集まりをいう．収束を考える対象に順序があり，添字の大小が収束対象の大小に反映される網を増大網 (increasing net) という.
- **両線型形式**[1)] (sesquilinear form) は第二変数について線型とする．これは物理での習慣であるが，数学的にも合理的なものである．第一変数を線型にとるのであれば，ベクトル v と線型写像 ϕ の積を $v\phi$ のように表記するのが整合的であるという理由で.
- エルミート形式 (hermitian form) と分極等式 (polarization identity) $\langle\xi,\eta\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4}(-i)^k\langle\xi+i^k\eta,\xi+i^k\eta\rangle$.
- 正値形式 (positive semidefinite form) = 半内積 (semi-inner product)，正定値形式 (positive definite form) = 内積 (inner product) である.
- 内積，半内積ともに $(\ |\ )$ という記号で表すことが多い．複素ベクトル空間 V 上の半内積があると，内積の不等式から $(w|w)=0$ となる $w\in V$

1) 準双線型形式，半双線型形式などとも呼ばれ定訳がない．ここでは両の字をあててみた．両の字義は，両親・両手の如く，相対して一組となるものの双方，ということで.

は，すべての $v \in V$ と直交し，したがって，$W = \{w\}$ という部分空間による商空間 V/W 上の内積を自然に定める．

- 行列記号について，$M_{m,n}(S)$ で集合 S の元を成分とした $m \times n$ 行列全体を表す．$M_{m,1}(S) = {}^mS$, $M_{1,n}(S) = S^n$ と略記する．
- 交換子と反交換子：$[a,b]_\pm = ab \pm ba$．交換子が多用されることもあり，$[a,b]_- = [a,b]$ と書く．また，$[a,b]_+ = \{a,b\}$ という記号もよく使われる．こちらは集合の記号と紛らわしいのであるが，そこは良識で判断．

$$[a, b_1 \cdots b_n] = [a, b_1]b_2 \cdots b_n + b_1[a, b_2]b_3 \cdots b_n + \cdots + b_1 \cdots b_{n-1}[a, b_n],$$

$$ab_1 \cdots b_n = \sum_{j=1}^{n} (\mp)^{j-1} b_1 \cdots [a, b_j]_\pm \cdots b_n + (\mp)^{n-1} b_1 \cdots b_{n-1}[a, b_n]_\pm$$
$$+(\mp)^n b_1 \cdots b_n a,$$

$$[ab, c] = a\{b, c\} - \{a, c\}b, \quad [a, bc] = \{a, b\}c - b\{a, c\}.$$

他に，$[a,b]_\pm^* = [b^*, a^*]_\pm = \pm[a^*, b^*]_\pm$ などが成り立つ．

- 交換子との関連で，$[a,b] = 0$ すなわち $ab = ba$ であるとき，積交換すると呼ぶ．より一般的に 2 つの集合 X, Y が積交換するとは，$[x,y] = 0$ $(x \in X,\ y \in Y)$ となること．積交換するという代わりに可換であるという言い方もよく使われる．
- 自由ベクトル空間とヒルベルト空間：集合 X に対して，X を基底とするベクトル空間を $\mathbb{C}X$ と書いて，X から生成された**自由ベクトル空間** (free vector space) と呼ぶ．自由ベクトル空間 $\mathbb{C}X$ には，X を正規直交系とする内積が定まる．その完備化としてのヒルベルト空間を $\ell^2(X)$ で表す．