まえがき

線形代数はデジタルデータとアルゴリズムの時代に，多くの分野で現象や考え方を記述する共通言語として重要な学問分野となっている[1)]．筆者の研究分野である信号処理と機械学習においてもいろいろな手法が線形代数を用いて導出され，線形代数の言葉で記述されている．

しかし，その重要性にもかかわらず，研究開発の現場で活躍するエンジニアの多くが線形代数に対して一種の「苦手意識」を持っているのも事実であろう．筆者は共立出版から『統計的信号処理』と『ベイズ信号処理』の 2 冊を出版し，これらの本の内容に関して企業のエンジニアや研究開発者と接することも多いが，そのような交流を通して，実は，「線形代数の言葉で記述されている」ことが，信号処理や機械学習を学ぼうとする多くの人たちに対して，かえって高い敷居となっていることに気づかされることも多い．

線形代数は，ほとんどの大学では，入学直後の教養課程での授業となっている．したがって，大方の学生にとって線形代数の重要さについてはっきりとした認識を持つ以前に，この重要な分野についての授業を受けるわけである．しかも，その授業は往々にして，理論体系の一般性に（過度に）重きを置いて行われ，定理と証明が延々と続く中で「今何を目指しているのか」がわからなくなるような退屈なものである．多くの学生は単位を落とさない程度に適当に勉強して，単位を取った後は大半のことは忘れてしまうのが普通であろう．そして，大学院での研究，あるいは企業で研究や開発に携わったときに，線形代数を「使える道具」として身に付けていることがいかに重要であるかを思い知り，「もっとまじめに勉強しておけばよかった」と後悔す

[1)] 経済学者のブライアン・アーサーは次のように述べている．「これまでテクノロジーを前進させてきたのは物理学である．20 世紀には物理的な世界を理解しようとして微分方程式に代表される連続変数の数学（微積分学）を使っていた．今日，テクノロジーを前進させているのはデータとアルゴリズムであり，それらのベースとなっているのが離散数学（線形代数）である.」W. ブライアン・アーサー『テクノロジーとイノベーション―進化/生成の理論』（みすず書房）より抜粋．ただし括弧内は筆者の挿入．

ることになるのである．

本書は，この「後悔している」人たちを想定する読者として書いた本である．すなわち，読者としては，大学院生や実際の現場で働く技術者で，特に信号処理や機械学習といった分野を学ぼうとしていて，線形代数を使った記述にむずかしさやもどかしさを感じている人たちを想定している．線形代数については全く知らないわけではなく，昔の授業の痕跡は頭の中にあるが，明快に整理された知識ではなく，何とか線形代数を道具として使いこなしたいと考えている人たちが対象とする読者である．

本書の執筆に際しては，まず，線形代数の体系の中から知っておかなければならない項目を選別した．高度に発達した数値計算ソフトウェアを用いるのが当たり前となった現在では，道具としての線形代数を考えた場合，事柄の重要度は以前とは変わりつつある．例えば，あるデータの共分散行列の固有値や特異値を計算するとしよう．この場合でも特異値や固有値の計算法そのものは（計算は数値計算ソフトウェアが実行してくれるため）もはや重要ではない．重要なのは，そこで得られた固有値や特異値，あるいは特異値ベクトル等がどんな意味を持っているのか，つまり，それらがデータのどんな特性を表しているのか，を考えることができることである．

このような考え方に沿って，以下のとおりに本書を構成した．まず，第 1 章では，本書を読み進めるのに必要最低限の基礎的な線形代数の知識を整理してまとめた．第 2 章では，線形代数の応用において極めて重要な行列の特異値展開について述べる．特異値展開は，多くの教科書では後の方に書かれていて，いくつもの章を読んで行きやっとたどり着くことができるのが普通であるが，本書では第 2 章で特異値展開まで一気に説明する．第 3 章ではベクトル空間について述べる．この章で述べる基底・次元および行列の 4 つの部分空間は線形代数の応用上重要なものである．

第 4 章以降は，線形代数の現実世界への具体的な応用例について解説した．現実世界の問題を線形な現象としてモデル化し，問題を線型方程式に落とし込むことはよく行われることであるが，そこで出会う方程式は方程式の数と未知数の数が異なる場合がほとんどである．第 4 章では，そのような方程式でどのようにして「妥当な」解を得るかを説明する．

第 5 章から第 7 章は，第 3 章で述べた行列の 4 つの部分空間の実世界へ

の応用を説明する．対象となるのは多数のセンサーで空間に分布した波動を同時計測するセンサーアレイ信号処理と呼ばれる分野で，第 5 章と第 6 章は計測データの信号とノイズの分離に関するもの，第 7 章は計測データから信号源を推定する問題に関するものである．センサーアレイ信号処理は，最近では次世代携帯電話の 5G 通信規格に取り入れられ身近なものになりつつある．

第 8 章ではガウス確率モデルを用いたベイズ機械学習の基礎を説明する．ベイズ機械学習も線形代数を縦横に用いる分野であり，そこで定番として用いられる考え方を解説した．第 9 章では，本書で述べた代表的な方法について，コンピュータシミュレーションにより有効性を示す．コンピュータシミュレーションに用いたコードは，共立出版のホームページ (https://www.kyoritsu-pub.co.jp/bookdetail/9784320086494) に公開してある．

本書は，筆者の友人である Srikantan S. Nagarajan 氏と Hagai Attias 氏との共同研究における議論が基になっている．ここに深く感謝する次第である．また，筆者の共同研究者で，株式会社リコーの工藤究氏，森瀬博史氏，小池暢人氏，三坂好央氏には入稿前の原稿に目を通していただき数々のご教示をいただいた．深く感謝申し上げる．共立出版の日比野元氏には，前著に続き本書でも，企画の段階からご助力いただいた．また，同社の髙橋萌子氏には原稿の校正で大変尽力いただいた．御両者に深く感謝申し上げる．

本書が，線形代数を学びなおす読者の手助けに少しでもなれば喜びである．

2019 年 10 月

関原謙介