付　　録B

2.5節に対する補足説明

2.5 節に対する補足説明である．2.5 節の式 (2.58)，式 (2.59) および式 (2.60) を証明する．

B.1　定義と準備

単位ベクトル $\boldsymbol{x}$（$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^M$, $\|\boldsymbol{x}\| = 1$）と $\boldsymbol{y}$（$\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^N$, $\|\boldsymbol{y}\| = 1$）を用いて，行列 $\boldsymbol{F}$（$\boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^{M \times N}$）に対して，内積 $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{F} \boldsymbol{y}$ の最大値と，最大値を与える $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ を求める問題を考える．まず $R = \min\{M, N\}$ として，$\boldsymbol{F}$ の特異値展開を

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{U} \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{V}^T$$

とする．$\boldsymbol{U} = [\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_R]$ および $\boldsymbol{V} = [\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_R]$ であり，特異値を対角成分に持つ対角行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ を

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{diag}([\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_R])$$

と表す．ここで，特異値は大きさの順に番号づけされているとする．

B.2　式 (2.58) の証明

以下を証明する．

$$\gamma_1 = \max_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{F} \boldsymbol{y} \tag{B.1}$$

この最大値を与える $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ はそれぞれ $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}_1$ および $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{v}_1$ である．

証明　$\boldsymbol{F}$ の特異値展開を用いると

$$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{F} \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{U} \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{V}^T \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{x})^T \boldsymbol{\Sigma} (\boldsymbol{V}^T \boldsymbol{y})$$

である．$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{x}$ および $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{V}^T \boldsymbol{y}$ とすれば，$\boldsymbol{U}$ と $\boldsymbol{V}$ は直行行列なので，$\|\boldsymbol{f}\| = \|\boldsymbol{x}\| = 1$ および $\|\boldsymbol{g}\| = \|\boldsymbol{y}\| = 1$ である．すなわち，$\boldsymbol{f}$ と $\boldsymbol{g}$ も単位ベクトルである．

したがって，$\boldsymbol{f} = [f_1, \ldots, f_R]^T$ および $\boldsymbol{g} = [g_1, \ldots, g_R]^T$ として

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{F} \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}^T \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{g} &= \sum_{j=1}^{R} \gamma_j f_j g_j \le \sum_{j=1}^{R} \gamma_j |f_j||g_j| \\ &\le \gamma_1 \sum_{j=1}^{R} |f_j||g_j| \le \gamma_1 \sqrt{\sum_{j=1}^{R} f_j^2 \sum_{i=1}^{R} g_i^2} = \gamma_1\end{aligned} \tag{B.2}$$

である[1)]．ここで $\boldsymbol{F}$ の特異値展開から $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{F} \boldsymbol{y} = \gamma_1$ となるのは $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}_1$ および $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{v}_1$ の場合であることは明らかである．したがって，式 (B.1) を示すことができた．

（証明終）

B.3　式 (2.59) の証明

次は，単位ベクトル $\boldsymbol{x}$（$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^M$, $\|\boldsymbol{x}\| = 1$）と $\boldsymbol{y}$（$\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^N$, $\|\boldsymbol{y}\| = 1$）を用いて，行列 $\boldsymbol{F}$（$\boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^{M \times N}$）に対して，次を証明する．

$$\gamma_2 = \max_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{F} \boldsymbol{y} \quad \text{subject to} \quad \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{u}_1 = 0 \quad \text{および} \quad \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{v}_1 = 0 \tag{B.3}$$

1) 式 (B.2) ではシュワルツ不等式 $\left(\sum_j^n a_j b_j\right)^2 \le \sum_{j=1}^n a_j^2 \sum_{i=1}^n b_i^2$ を用いた．

すなわち，$\boldsymbol{u}_1$ と直交する単位ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{v}_1$ と直交する単位ベクトル $\boldsymbol{y}$ を用いた場合の $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{F}\boldsymbol{y}$ の最大値が γ_2 であることを示す．

証明 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{u}_1 = 0$ であるので，

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{U}^T\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_R]^T\boldsymbol{x} = [0, f_2, \ldots, f_R]^T$$

となる．ここで $\|\boldsymbol{f}\| = \|\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{x}\| = 1$ であり，したがって，$f_2^2 + \cdots + f_R^2 = 1$ が成り立つ．同様に，$\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{v}_1 = 0$ であるので，

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{y} = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_R]^T\boldsymbol{y} = [0, g_2, \ldots, g_R]^T$$

であり，$\|\boldsymbol{g}\| = \|\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{y}\| = 1$ であるので，$g_2^2 + \cdots + g_R^2 = 1$ が成り立つ．以上のことより，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{F}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{y}) &= \sum_{j=2}^{R}\gamma_j f_j g_j \\ &\leq \sum_{j=2}^{R}\gamma_j|f_j||g_j| \\ &\leq \gamma_2\sum_{j=2}^{R}|f_j||g_j| \leq \gamma_2\sqrt{\sum_{j=2}^{R}f_j^2\sum_{i=2}^{R}g_i^2} = \gamma_2 \end{aligned} \quad \text{(B.4)}$$

が成り立つ．$\boldsymbol{F}$ の特異値展開から $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{F}\boldsymbol{y} = \gamma_2$ となるのは $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}_2$ および $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{v}_2$ の場合であることは明らかである．よって，式 (B.3) が成り立つ．

（証明終）

B.4　式 (2.60) の証明

さらに次を示す．単位ベクトル $\boldsymbol{x}$（$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^M$, $\|\boldsymbol{x}\| = 1$）と $\boldsymbol{y}$（$\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^N$, $\|\boldsymbol{y}\| = 1$）を用いて，行列 $\boldsymbol{F}$（$\boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^{M\times N}$）に対して，

$$\begin{aligned}&\gamma_k = \max_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{F}\boldsymbol{y} \quad \text{subject to} \\ &\qquad \boldsymbol{x}^T[\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{k-1}] = \boldsymbol{0} \quad \text{および} \quad \boldsymbol{y}^T[\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1}] = \boldsymbol{0}\end{aligned} \quad \text{(B.5)}$$

が成り立つ．

証明　$\boldsymbol{x}^T[\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{k-1}] = \boldsymbol{0}$ であるので，

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{U}^T\boldsymbol{x} = [0, \ldots, 0, f_k, \ldots, f_R]^T$$

となる．ここで $\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{f}\| = 1$ であるので $f_k^2 + \cdots + f_R^2 = 1$ が成り立つ．同様に，$\boldsymbol{y}^T[\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1}] = \boldsymbol{0}$ であるので，

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{y} = [0, \ldots, 0, g_k, \ldots, g_R]^T$$

となり，$\|\boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{g}\| = 1$ であるので，$g_k^2 + \cdots + g_R^2 = 1$ が成り立つ．以上のことより，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{F}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{y}) &= \sum_{j=k}^{R} \gamma_j f_j g_j \\
&\leq \sum_{j=k}^{R} \gamma_j |f_j||g_j| \\
&\leq \gamma_k \sum_{j=k}^{R} |f_j||g_j| \leq \gamma_k \sqrt{\sum_{j=k}^{R} f_j^2 \sum_{i=k}^{R} g_i^2} = \gamma_k \qquad \text{(B.6)}
\end{aligned}$$

が成り立つ．$\boldsymbol{F}$ の特異値展開から $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{F}\boldsymbol{y} = \gamma_k$ となるのは $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}_k$ および $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{v}_k$ の場合であることは明らかである．よって，式 (B.5) が証明できた．

（証明終）