

## はじめに

本書は、「なるほど」の納得感で学ぶことができるように編まれた確率解析のスタンダード版であり、確率微分方程式のエッセンスを抜き出してまとめられている。

たとえば大学での微分積分には、親しみやすい標準的な教科書と自習書がたくさんある。これに対して確率解析は、伊藤清先生によって1940年以降に構築された偶然現象の解析理論であり、その内容は確率積分と確率微分方程式から一般化された抽象的な概念に至るまで、広範囲にわたっている。

しかし、専門以外の人たちにとっては難しいところがたくさんあり、学びのハードルが高く見える感もある。これまで慣れてきた組合せ論的な確率が測度論的な確率で記述されるようになり、確定的な関数に対する従来型の微分積分から、ランダム（偶然的）に揺らぐ変数の計算、そして気まぐれなノイズ（揺らぎ）の環境で時間発展するプロセスの解析に移行してしまうのであるから、戸惑うとすれば、それは当然かもしれない。

確率解析の理論と応用の研究は、特に1970年以降に目覚ましい発展を遂げてきた。今、ビッグデータの存在はますます身近で大きなものになり、AI、IoT、Fin Tech（フィンテック）、機械学習など多くの技術と技法が私たちの生活を変えつつある。知識社会で価値を創造していくためにも、偶然数学のツールである確率解析の学びは重要になってきている。

そこで、確率の概念から確率変数と確率過程までの実際をしっかりと掴んで、ブラウン運動に関する確率積分と確率微分方程式の基本を、初学者でも、とことん習得できるよう、次のようにデザインした。ルベグ積分や測度論などの予備知識がなくても入門できるようになっている。

1. 定理の説明（時には証明）⇒ 例題 155（全解答）⇒ 問 155（全解答）⇒ 章末演習問題 50（全解答）、このような要点確認、反復練習および44の図による可視化で「なるほど」の納得感を得ることができる。
2. 集合関数としての確率、偶然に実数の値をとる確率変数、観測された情報のもとで最良の推定値を与える条件付き平均、これらの基本を丁寧に押さえ、ガウス過程、マルコフ過程、マルチンゲールなど時間と共に増大していく知識情報に適合した確率過程の特性を、具体的な計算で理解

することができる。

3. 簡単なことを詳しく調べれば一般の場合がよく分かる，計算すれば手が記憶する，深いことをおもしろく，このように学んでブラウン運動の性質と伊藤の確率積分を使いこなすことができる。
4. 結果として，たとえば花粉や株価のように，自然界と社会で偶然に推移する動点の軌跡と法則を記述している数学的なモデルの確率微分方程式について，そのエッセンスを吸収することができる。そして，具体的な解の構造を理解した上で応用への展開を試みることができる。

ところで伊藤清先生は，フェラーから聞いたヒルベルトの言葉を紹介されている。「非常に簡単な問題について，人よりずっと詳しく研究しなさい。そうすると，一般の場合が本当に分かる。」（高橋陽一郎〔編〕『伊藤清の数学』，日本評論社，2011；261頁）。研究に関するこの言葉は，学ぶということにも同じように響いてくる。

また，作家の井上ひさし先生は，「『手が記憶する』，これはゲーテの言葉です。手で書いたことは忘れないのです。」と創作の原点をお書きになっている（井上ひさし『ふかいことをおもしろく』，PHP，2011；111頁）。書くという仕事に関するこの言葉は，計算するということにも通じてくる。

このような観点から，初学者でも学びやすいように，計算と例題をたくさん取り入れて本書をまとめてみた。

筆者による既刊書（『確率解析への誘い—確率微分方程式の基礎と応用—』，共立出版，2016）では，基礎理論の生い立ち，定式化の由来，論理的な手続きなどに関する説明と数学的な応用モデルの紹介に頁が割かれていた。

本書では，確率と確率過程について丁寧な準備が行われている。そして，使いこなせる確率積分，もっとわかる確率微分方程式のために，本質を体感できるような計算例がたくさん与えられている。

全問題に詳しい解答をつけてあるので，必ずしもペンをもたなくても，目で解答を追っていけるはずである。本書を繰り返し読むことにより，まず馴れていただきたい。

ここ半世紀における確率解析の急速な発展は，偶然現象に関わる数理解析の理論研究と応用発展に大きな影響を与えてきた。本書での第一歩とともに更なる専門書の学びが，読者の知的経験の拡大につながっていけば幸いである。

話は変わるが，かつて確率論セミナーという研究活動のグループ組織があり，大学間で順次事務局を運営していた。大学院生になった筆者がたまたま事務局の会計係を担当していたある日のこと，アメリカから事務手続きについての手紙が届き，それは伊藤清先生からであった。その後，伊藤先生は数理解析

研究所の教授に復帰されて、確率微分方程式に関する国際シンポジウムの開催（1976年7月）に尽力された。そのシンポジウムの案内を伊藤先生からいただいて参加し、先端研究の輝きに感動したのは貴重な思い出となっている。

それ以来、多くの先生と研究者の皆様にご教授いただき、そして同僚の皆様には励ましをいただき、今日までの研究と教育に携わることができた。ここに、心からなる感謝を捧げたい。

筆者はこれまで、共立出版から「エクササイズシリーズ」、「例題で学べる確率モデル」、「確率解析への誘い」でお世話になってきた。編集部の大越隆道氏は教育と研究の観点から筆者に助言し、企画を支援して下さった。同じく編集部の三浦拓馬氏は「確率解析への誘い」に続いて編集の実務を担い、伝える力の繊細な技をもって学びやすいかたちに仕上げして下さい。また、営業企画部の稲沢会氏からは長年にわたって、知識社会への転換期を迎えて何をすべきかを語り合う中で、温かい励ましを頂いた。出版に際してお世話になった3氏に深く感謝いたします。

2020年3月

成田 清正