

# 目 次

|                        |     |
|------------------------|-----|
| はじめに .....             | iii |
| <b>第 1 章 標本空間と確率</b>   |     |
| 1.1 いろいろな事象 .....      | 1   |
| 1.2 確率空間 .....         | 3   |
| 1.3 確率の性質 .....        | 11  |
| 1.4 条件付き確率 .....       | 16  |
| 1.5 事象の独立性 .....       | 20  |
| 演習問題 .....             | 23  |
| <b>第 2 章 確率変数と分布</b>   |     |
| 2.1 確率変数の性質 .....      | 25  |
| 2.2 確率変数の確率法則 .....    | 30  |
| 2.3 多変数の分布 .....       | 35  |
| 2.4 確率変数の独立性 .....     | 39  |
| 2.5 平均と分散 .....        | 45  |
| 2.6 確率変数の変換 .....      | 57  |
| 2.7 確率変数のいろいろな収束 ..... | 63  |
| 2.8 条件付き平均 .....       | 73  |
| 演習問題 .....             | 83  |
| <b>第 3 章 確率過程からの準備</b> |     |
| 3.1 確率過程の定義と分布 .....   | 85  |
| 3.2 確率過程の見本経路 .....    | 90  |

|     |                       |     |
|-----|-----------------------|-----|
| 3.3 | 多変量正規分布とガウス過程         | 95  |
| 3.4 | 確率過程の $\sigma$ -フィールド | 103 |
| 3.5 | マルコフ過程                | 111 |
| 3.6 | マルチンゲール               | 121 |
|     | 演習問題                  | 132 |

## 第4章 ブラウン運動

|      |                         |     |
|------|-------------------------|-----|
| 4.1  | ランダム・ウォークからブラウン運動へ      | 134 |
| 4.2  | ブラウン運動の基本的な性質           | 140 |
| 4.3  | 見本経路の性質                 | 144 |
| 4.4  | ガウス過程としてのブラウン運動         | 150 |
| 4.5  | マルチンゲールとしてのブラウン運動       | 153 |
| 4.6  | マルコフ過程としてのブラウン運動        | 158 |
| 4.7  | ドリフトをもつブラウン運動, 幾何ブラウン運動 | 162 |
| 4.8  | オルンシュタイン・ウーレンベック過程      | 167 |
| 4.9  | ブラウン運動と偏微分方程式           | 171 |
| 4.10 | 多次元ブラウン運動               | 173 |
|      | 演習問題                    | 175 |

## 第5章 確率積分

|     |                      |     |
|-----|----------------------|-----|
| 5.1 | リーマン・スティルチェス積分との違い   | 176 |
| 5.2 | 階段過程に対する確率積分         | 179 |
| 5.3 | 被積分関数の広いクラスと確率積分     | 185 |
| 5.4 | 伊藤過程とその2次変分, コンペンセータ | 199 |
| 5.5 | 伊藤の乗積表と確率積の微分公式      | 206 |
| 5.6 | 伊藤の公式                | 213 |
| 5.7 | 多次元の確率微分             | 220 |
| 5.8 | マルチンゲールの表現定理と伊藤の表現定理 | 227 |
|     | 演習問題                 | 230 |

## 第 6 章 確率微分方程式

|                              |     |
|------------------------------|-----|
| 6.1 常微分方程式から確率微分方程式へ         | 232 |
| 6.2 SDE の解の存在と一意性            | 242 |
| 6.3 大域解, 局所解, 弱い意味の解         | 259 |
| 6.4 ウィーナー積分とガウス過程, 指数過程と SDE | 264 |
| 6.5 線形確率微分方程式                | 274 |
| 6.6 確率測度の変換とギルサノフの公式         | 283 |
| 6.7 ストラトノビッチ積分と確率微分方程式       | 297 |
| 演習問題                         | 306 |

## 第 7 章 確率微分方程式と拡散過程

|  |     |
|--|-----|
| 7.1 多次元の確率微分方程式                        | 308 |
| 7.2 マルコフ過程および拡散過程としての解                 | 312 |
| 7.3 コルモゴロフの方程式                         | 323 |
| 7.4 デインキンの公式とファインマン・カッツの公式             | 332 |
| 7.5 時間的に一様な拡散過程                        | 339 |
| 7.6 ランダム・ウォークとエーレンフェストの壺による<br>拡散過程の導出 | 343 |
| 7.7 拡散過程に対する不変測度                       | 347 |
| 演習問題                                   | 353 |

|         |     |
|---------|-----|
| 演習問題の解答 | 354 |
| 参考図書    | 371 |
| 索引      | 375 |