

序

微分積分学とは何か

読者の諸君は、高校で、微分と積分を学んだはずである。しかし、多くの教科書では、「微分と積分はどこでどう使われるのか」という本質的なことはあまり議論されておらず、また授業時間の不足から計算テクニックの習得で終わってしまうことも多いようだ。残念な結果である。「微分とは、接線の傾きを求めること」「積分とは、微分の逆」というような程度の理解の仕方では、本質を得ず、実にもったいない成果でしかない。

微分は「微妙に分かる」
積分は「分かった積もり」
というジョークが昔あった。

結論から述べておこう。

微分積分学は、ものごとの変化を解析する学問である。

自然界にはいろいろな現象があるが、すべて「小さな変化」の積み重ねで表現できると考えられる。その「小さな変化」を取り扱うのが微分・積分である。面積や体積を計算するのも、速度や加速度を計算するのも、結局は、小さな小さな量で計算することを繰り返せば、すべての量が計算できる、というのが微分積分を貫くポリシーである。そして微小量を計算しているはずが、いつのまにかグラフ全体を概観できるツールになっていたりと、全体の総計を知ることができたりする。

学問は、その必要性があって発展を続けている。微分や積分が発明されたのは、自然を理解しようとする試み、今日の「物理」からだった。

微積は、局所 (local) から大局的 (global) な情報を得るツールである。

「小さな変化がどうなっているのか」という学問で、自然界のすべてが制覇できるのだ。

微分積分は、自然を理解する第1歩となる道具である。人類が発明したこの便利な道具を君も使いこなしてみたくなっただろうか。

本書について

山登りにはトレーニングも必要だが、先が見えずにひたすら計算練習のトレーニングを繰り返すのもつらいものだ。本書では、「いま説明したことが、どこでどう使われるのか」という点にこだわって、たくさんコメントを入れてある。おせっかいかもしれないが、難易度の表示も入れておいた。また、関連する公式や説明箇所に戻ったり、進んだりできるようにコメントしてある。あちこちのページに飛びながら、どん欲に「学問する」姿勢をもってほしい。

本書は、微分積分を駆使して、読者が自ら問題を設定して解決できるように、という願いを込めて執筆した。

以下、いくつかの特徴を。

- 本書は、筆者の情報科学部における講義「微積分学」(大学1年生前期科目)のテキストとして執筆した。14回の授業で、高校数学の復習から偏微分まで到達する意欲的で忙しい授業である。
- 基礎知識の確認の意味で、「第0章 準備」の章を用意した。これは、昨今の大学入試が多様化し、新入学生の数学レベルに差があることに対応するためである。新入生の講義では「第0章」の内容は既知として講義を始めたい。基礎知識に不安がある読者は、まず第0章の理解を目標にしてほしい。第0章では、高校で学ぶ内容だけではなく、量化記号の紹介や双曲関数の定義など、事前に知っていた方がよいと思われる内容も含めてある。
- 定義や公式などには、それぞれ重要度を示す意味で、【Level 1】【Level 2】…等の注釈を入れた。
【Level 0】は Basic レベル、多くは高校数学レベルである。
【Level 1】は Standard レベル。本講義で伝えたい重要なもの。
【Level 2】は Advanced レベル。ちょっと数行計算すれば得られる公式である。ややハイレベルなものも【Level 2】としているので、初学の際には飛ばしても構わない。
- 第2章から、数列・極限、1変数の微分・積分を説明した後、第4章ではパラメータ(媒介変数)を用いた曲線についてまとめる章を設けた。多くの教科書では、微分や積分の話題や応用としてあちこちに分散して登場しているが、本書ではこれを一括してまとめている。
- 第5章で多変数関数の微分・積分である偏微分と重積分の説明を簡単に行った。第5章は、紙数の制限もあって、急ぎ足で書いた。将来必要となるポイントには触れているつもりだが、証明などを省いた箇所もある。
- 大学の新生が微積分を応用するのは、おそらく物理学であろう。第6章は、物理・力学への応用として、運動方程式の積分

こうした工夫は、筆者が「せっかち」だからかもしれない。筆者は数学ではなく物理を専門としていて、微分積分を「使う」立場である。いつも必要に迫られてから、数学を最小限の知識で運用しようとするからか、自分で使って便利な本が欲しいと感じていた。

実は本書のタイトルとして当初考えていたのは『物理学者が書いたひとつ多量の微分積分—学び直しから発展まで—』だった。長すぎて教科書に採用されにくいという共立出版さんのご意見に従って短くなった。

【Level 3】という筆者の趣味に近いページもある。定理や公式でアミ掛けしたものは必須レベルである。

による保存則の導出や惑星の楕円軌道など、応用・発展的な例をいくつか紹介した。いずれも大学初年度に物理の授業として触れられる内容かもしれない。微積分の延長として興味をもって読んでいただければ幸いである。

- 例題・類題・章末問題は、解けたらオモシロイと思ってもらえるような、具体的な問題を多く含むことを心がけた。計算練習レベルの問題は、必要に応じて他の演習書で補っていただきたい。
- (完全ではないが) なるべく見開きで1つのテーマが収まるようにレイアウトを工夫した。

多くの教科書では、「微分方程式」や「級数」についても独立した章を設けて説明しているが、本書では触れていない。ときおり挿入したコラムで、雰囲気を感じてもらい、興味をもってもらえたら幸いである。

例えば、収束や連続についての ϵ - δ 論法を展開していない、とか、積分領域の境界では積分値がゼロ (測度がゼロ) であることを説明していない、など。

本書では微分積分を実用的に応用することを最優先にした。したがって、厳密ではない記述もあり、数学を専門とする方からは違和感を感じるというご意見もいただいた。しかし、筆者は数学は使うためにあると考えている。公式を導いた先にどんな応用が待っているのかを「わくわく」しながら、山を登りきってほしい。

謝辞

原稿段階でご意見をくださった大阪工業大学の数学担当の各氏に感謝いたします。特に、桑子和幸氏、斎文章氏からは多くのご指摘やご意見をいただきました¹⁾。一森哲男氏、斎藤隆氏、谷川明夫氏からは出版に関する助言もいただき、参考にさせていただきました。また、本書の作成にあたり大変お世話になりました共立出版(株)の寿日出男氏、および赤城圭さんに厚くお礼申し上げます。執筆に費やした4ヶ月間、協力(?)を惜しまなかった妻の理香にも最後に感謝の言葉を添えます。

2008年12月

著者

1) 出版後、本書中のミスなどが判明した場合、筆者のウェブページ

<http://www.is.oit.ac.jp/~shinkai/book>

で迅速に対応する予定です。