共立講座 数学の輝き 全40巻予定 [13] 巻 非可換微分幾何学の基礎
前田 吉昭·佐古 彰史著·新井 仁之·小林 俊行·斎藤 毅·吉田 朋広編
https://www.kyoritsu-pub.co.jp/bookdetail/9784320112070

はじめに

従来の幾何学は「点集合」を元に幾何学的理論や手法を開発してきたといえる．典型的には，多様体という空間概念を設定し，関数，ベクトル場，微分形式等の幾何学的対象物を定義していく．これは，空間（多様体）の「点」を元に定義されており，これらが多様体論の基礎概念を支え，その幾何学を発展させてきた．これは，物理学での相対性理論の飛躍に貢献し，それとともに幾何学の自助的な発展も得られたといえる．一方で，物理学は，その後量子論に大きく考えを変えている．量子論の基礎となる考え方は，ある意味では「点」を基礎としない概念で構成されている．

この物理学に呼応する数学が当然期待される．その候補として非可換幾何学が挙げられる．非可換幾何学はアラン・コンヌにより作用素環理論を基礎に発展し，トポロジー的観点からの興味が重点とされている．一方で，相対性理論とともに発展してきた微分幾何学の立場から量子論に対応する幾何学としてのアプローチを期待することはその歴史的流れからみても当然であろう．その立場から，変形量子化を基にした非可換多様体の構成が行われてきている．これが，果たして量子論に呼応できる微分幾何学的発展となるかどうかは，時間がかからないと分からないとは思うが，幾何学への新しい挑戦として考えていく必要があると考えている．

本書では，そのような考えに市民権を与える第一歩となるべく，初心者に興味を持ってもらえるように努力をしたつもりである．

本書は，主に三部に分かれた構成になっている．第 1 章から第 3 章は本書で用いられる基本的概念等の説明および本書の根底となる「点」概念についての代数的取扱いである．本書で説明する Pursell-Shanks 型定理は，点概念を関数環に置き換えることで，古典的な空間概念から非可換空間への移行を意識させることができることである．その空間概念をさらに発展させて，代数の変形へと進むことである．第 4 章から第 8 章まではシンプレクティック多様体の変

形量子化について解説する．第 4 章と第 5 章では，シンプレクティック幾何学から構成される代数構造（ポアソン代数）について，空間概念を代数化することを説明する．シンプレクティック幾何学は，古典力学を説明するために重要な空間概念の設定であるが，量子化へ向かうために，ポアソン代数がそのキーポイントとなることを説明したい．第 6 章から第 8 章で，シンプレクティック多様体のポアソン代数の変形量子化により，非可換多様体の概念を構成していく．これが，非可換微分幾何学の基本となることを説明することが本書の目的ともいえる．第 9 章と第 10 章では，さらに一般のポアソン代数およびその変形量子化についての説明を与えたい．

非可換微分幾何学は，変形量子化で得られた非可換多様体を基に従来の微分幾何学で考えてきた幾何学的概念を発展させることであろうと考えている．しかしながら，それらの説明を行うためにも，本書で提案する非可換多様体の概念に多くの賛同が必要なのではないかと考えている．その意味では，まず本書の出版を機会に非可換多様体への市民権を与えたい．

非可換微分幾何学の最終到達点は，当然場の量子論である．数学および物理学のなかで共形場理論，位相場理論，非可換ゲージ理論，超弦理論等には非可換微分幾何の概念が期待されている．場の理論を変形量子化の立場から統一的に理解をすること，さらにはより発展させた非可換場の理論の構築を目指すことである．これらに挑戦するまでには，まだまだ時間が必要と思われるが，その目標へ向かった礎になりたいと切に希望するものである．

本書を読むにあたり，必要な知識としては以下の通りである．1, 2 章については，大学初年度の解析と線形代数で十分読める内容が大部分で，代数や群についての簡単な知識があることが望ましい．3 章以降は多様体などの微分幾何の基礎事項の知識が必須となる．

最後に本書を仕上げるにあたり，共立出版　赤城　圭氏，三浦 拓馬氏には編集者として大変お世話になった．また，貝沼 稔夫氏は多くの章に目を通して頂き完成度を高めることに貢献してもらった．また，査読者にも丁寧に通読して頂き多くの誤りを取り除くことができた．ここに深く感謝申し上げる次第である．

著　者