

はじめに

本書は大学数学科における、集合と位相入門、位相空間論の入門書と独習書を兼ねたものを目指している。筆者は学習院大学においてこれらのコースを担当し、演習、講義を重ねてきた。個人的感想であるが、大変楽しいコースを構築できたと思っている。本書はその講義ノート、演習問題集を基軸として、もう少し話したかったことを付け加えて書かれている。読者がその雰囲気を感じていただければ幸いである。

楽しさを感じていただきたいのは、簡潔で明解な証明（を目指している）である。ただし、必ずしも可能なわけではない。細かいところに注意しつつ、長い議論を重ねなくてはならないところには忍耐が必要である。心して取り組んでもらいたい。例でしか表現できないおもしろさがある。よい例は新しい発見を導き、より深い理解をもたらす。たくさんの例を用意した。多くの例は演習問題として、問の形で入れてある。やさしい問も難しい問もある。最後に解答篇を置いて、ていねいに略解をつけている。

第1章は初等的な集合論をまとめた。基本的な演算、積集合、写像の復習と、集合族の演算、べき集合の導入である。位相の考え方の準備として、開区間族の和集合は閉区間にならないが、共通集合は閉区間になる例があることを示した。

第2章は集合の濃度、すなわち集合の大きさである。有限集合以外は無限集合であるが、無限集合も可算無限集合と非可算無限集合に分かれ、さらに大きい集合もある…と際限がない。そのあたりには、感覚的にきわどいところ（数学的には問題はない）があり、たとえば、集合全体というものは、もはや集合でないほど大きいという結論が導かれる。

第3章では距離空間を導入する。集合に幾何的構造を定めるものである。点どうしが遠いか近いかということを数値的に定める最も単純な、最も簡便

ii はじめに

な方法である。距離を保つ変換は合同変換で、いわば硬い構造を定めているが、軟らかい位相構造の土台を作っているといえる。 ε 近傍の扱いは位相構造の基本である。 ε 近傍は開集合を定める。距離を忘れて、開集合だけを考えれば、もう位相構造である。

いよいよ第4章から位相構造の議論が始まる。しかし、定義としては、ただ開集合の公理だけである。ほとんどとらえどころがなく、意味のあるものは何もない気がする。定義から、位相というものは何だろうと考えると、自然にこういうものがあるとわかってきて、分類に至る道が見えてくるものではない。ここで、 ε 近傍から、開集合を作る過程を思い出すのがよい。距離空間において、開集合は単に、任意の ε 近傍いくつか（無限個でもよい）の和集合である。一般の位相空間において、距離空間の ε 近傍にあたるものは開基と呼ばれる。いわば、開集合の種で、そこから開集合が生えてくるのである。

第5章では近傍系の理論を展開する。 ε 近傍の議論を抽象化し、各点ごとに整理したものである。1点に対し、その十分近くの点をすべて含む集合を近傍という。たとえば、各点の近傍をこのように定めると指定して、位相構造を導入することに使われる。その理論は抽象的に述べられるが、かなり精妙な、受け入れるのに苦勞する議論が続く。しかし、この後の議論でしばしば出てくる概念であるから、避けて通ることはできない。初めて近傍理論を学ぶときには、軽く形式的に理解して、後で出てくるたびに思い出して、その場で考えるのもよいと考えている。

このような集合と位相に関する複雑な議論の理解を進めるとき、2重の思考を平行して行う必要がある。1つは幾何的思考で、精密なイメージを頭の中あるいは紙の上に描いて、何が起きているかを把握することである。単純なベン図だけですむこともあるが、空間的なイメージを構築する必要もあるかもしれない。もう1つは論理的作業で、一切イメージを用いずに、論理的操作だけで、条件をすべて見落とすことなく、正確な議論を積み上げていくことである。この2つをともに行って、数学的思考実験を繰り返すことで理解を進めていく。頭の中で、すべてがはつきりするまで、思考実験を繰り返すのである。時間がかかるし、体力もいる。十分な休息も必要だし、ときには、24時間の中断も有効である。しかし、2週間以上中断が続くと、もとの高みまで戻

るのに大きな助走が必要である。

実は、第4章、第5章は基礎工事で、位相構造の議論の枠組みを定めるためのものである。

第6章は本格的議論のための、位相特有の用語の準備である。

第7章部分空間、第8章連続写像、第9章積空間と建設的議論である。新しい空間、新しい写像、新しい位相が続々構成されるようになる。積空間の後半では、無限積空間を扱い、列や写像も位相空間の点として扱えるようになる。

第10章は分離公理をまとめた。第11章コンパクト空間では、少し難しいところ、チコノフの定理とストーン-チェックのコンパクト化まで扱った。

第12章商空間、第13章連結空間ではよりたくさん例をいれた。

第14章ピアノ連続体、付録A 分解不可能連続体は、あまり邦書では取り上げられなかった話題である。普通の教科書には載っていない空間である。楽しんでもらいたい。

付録Bは本書で使われた集合論の定理を解説する、選択公理を明らかな形で用いる証明である。興味のある方は参照していただきたい。