

まえがき

「数学の授業では、わけがわからないままに、勝手に進んでいく」という経験は、文系学生に限らず、多くの学生に共通する経験のようです。実際、私たちが文系大学生を対象に行った調査からもこのような事実が浮かび上がってきます。もちろん、数学を教える側の数学の先生は、授業を受ける学生がわかるように、と思って教えているはずですが、では、なぜ、わけがわからないまま進んでしまう、と多くの学生が感じてしまうのでしょうか。それは、数学を教える側の先生が数学ということばを自由自在に操れる人であるのに対して、学生の皆さんは数学ということばをうまく話せない人だからだと、私たちは考えています。

簡単な例を1つ紹介してみたいと思います。

$\sum_{k=2}^4 (2k-1)$ という式は、 $2k-1$ という式の k に、2, 3, 4 を代入して、それを合計しなさい、という意味です。したがって、 $(2 \times 2 - 1) + (2 \times 3 - 1) + (2 \times 4 - 1) = 3 + 5 + 7 = 15$ となります。こうして、「 $2k-1$ という式の k に、2, 3, 4 をそれぞれ代入して、それを合計しなさい」とことばで表現すると、 $\sum_{k=2}^4 (2k-1)$ という式よりもずいぶんわかりやすいと思います。実際、私たちの調査では、文系大学生では約4割しか、 $\sum_{k=2}^4 (2k-1)$ という式の意味を正確に理解していませんでした。

これは、式だけに限ったことではありません。たとえば、 $\frac{1}{4}$ という数は、数学ということばを使いこなせる人にとっては、頭の中では、0.25 という小数や、4倍したら1になる数という意味、 $\frac{1}{2}$ の2乗という意味、2の-2乗という意味など、様々な意味に結びついています。一方で、あまり数学ということばが得意でない人は、このような数字や数式が様々な意味に結びついていないために、数学の先生の説明が何を意味しているのかがわからず、結果として、数学の授業はわけがわからないまま、迷子のようにおいていかれるという

ことになるのです。

このような考え方に立つと、これまでの数学の授業やテキスト、参考書などの問題点がみえてきました。それは、数学を教える側がみている世界と数学を学ぶ側がみている世界が、全く違っているにもかかわらず、教える側は自分がみえている世界が、学ぶ側にも当然みえているだろうと考えて教えているということにあると思います。言い換えると、数学ということばを話せる人が、数学ということばを話せない人に、数学ということばで話しているというのが、これまでの数学の授業だったということができないのではないのでしょうか。

私たちは、本書を書くにあたって、数学の用語をできるだけ身近な“ことば”に直して説明するように心がけました。そして、考え方や解き方についても、数学が得意ではない人でもわかるような記述にしています。このようなテキストを用いることで、高校まであまり数学が得意ではなかった皆さんであっても、多くの人は数学ということばを話すことができるようになると思います。

本書は、大学での数学のテキストとして書いたものです。読者として想定しているのは、高校で文系コースに所属していた方や理系コースではあったけれど数学が少し難しかったという方、あるいは、社会人として活躍しているのだけれども数学の必要性を感じて数学をもう一度学び直してみようという方です。そして、それらの方々が数学という思考ツールを使いこなせるようになるというのが本書の目標とするところです。ですから、本書では、高校の数学II・Bから数学III・C、そして、大学で理系の学生が習う線形代数や微積分学の入門的な学習内容の中から、とくに、現実場面を思考するためのツールとして役立つ数学の内容を取り上げて解説しました。大学の数学の内容までも踏み込んだために、少し難しいと思われる内容も含んでいますが、数学をできるだけことばに直して書きましたので、数学だから難しいと構える必要はありません。数学的な説明とことばによる説明を自分なりに結びつけて、ことばとしての数学の習得をめざしてください。

さて、ここで、本書の基本的な特徴を3つ示しておきたいと思います。

(1) 現実の問題を示して、その問題に隠れている数学的構造を探り当てることから始める。

一般に、高校までの数学の教科書では、最初に新しい数学の概念や解法、あるいは公式が紹介され、例題を解き進めながら、それらの概念や解法を習得していくという流れに沿って書かれています。しかし、本書では、数学を使って現実場面を思考する力を身につけるということを目的にしているため、各章の最初には、考えるべき現実の問題を掲げ、そして、そのような現実の問題を数学を使ってどのように思考することができるのかを解説しました。

(2) 問題—解説—数学的なまとめの構成とする。

本書では、現実の問題を数学を使って考えるということを学習した後に、まとめとして数学的な定義や公式の解説を行いました。これは、私たちが、最初に学んだことばとしての数学が、数学の世界ではどのように記述されているのかを理解してもらうためです。数学的な解説は、少し取っつきにくい印象を受けるかもしれませんが、本文同様にできるだけことばに直して説明してありますので、演習問題に取りかかる前のまとめとして活用してください。

(3) 数学の豊かなイメージをつくる練習問題を設定する。

数学ができる人というのは、式や数字を様々な意味としてとらえているということをお先に述べました。別の言い方をすると、式や数字に豊かなイメージをもてるようになっていると、ことばとしての数学が扱いやすいということです。皆さんがもっている、1つのことばに対するイメージは、これまでの様々な経験から得られたものであるように、数学のことばに対するイメージもまた経験によって豊かになっていくのです。ですから、単純な繰り返しになるかもしれませんが、イメージをつくる練習問題も用意してありますので、少し時間を割いて取り組んでみてください。

数学は、世界を語るためのことばです。この数学ということばを学ぶことこそ、思考ツールとしての数学を学ぶということであり、それによって、現実世界で起こる様々な現象を数学的にとらえて、思考することが可能になるのだといえます。もちろん、現実の問題を解決するためには、それぞれの専門分野の知識や概念があつてこそで、本書で扱っているような数学的思考だけで、現実の問題すべてに立ち向かうことはできません。しかし、複雑な現実の問題を、数学を使って思考してみることで、みえてくることが多いのもまた事実だと思っています。本書によって、多くの方が思考ツールとしての数学を使いこなせるようになる手助けになれば幸いです。

最後になりましたが、私たちと一緒に新しい授業に取り組み、草稿の段階から様々なコメントをいただいた大阪府立大学の内本夫氏、数見哲也氏、吉富賢太郎氏に感謝申し上げます。

2012年 初秋

川添 充，岡本真彦

第2版に寄せて

『思考ツールとしての数学』の初版発行から早八年が過ぎました。本書は、大学での数学のテキストとして書かれたもので、この間、本書を使った授業も著者たちの所属する大学で継続して行ってきましたが、喜ばしいことに他大学で教科書として使用されたりするだけでなく、高校の数学教育の関係者の方々からも興味をもっていただくことができました。

本書では、数学を伝える“ことば”をわかりやすくすること、数学が現実場面でも思考するためのツールとして役立つことを具体的な事例を通して伝えること、を大切にしています。しかし、初版発行から八年間、教室で実際に学生たちの反応を見ながら授業を積み重ねる中で、初版の記述の改善すべき点も見えてきました。また、現実場面で数学が使われている事例を用いた演習問題も初版執筆時点では十分に入れることができませんでしたが、八年間の授業を通してこうした問題も数多く蓄積することができました。今回の改訂ではこれらを踏まえて、全体の記述に手を入れるとともに、微分と積分の章は1つにまとめて構成を大幅に変更し、多変数関数の章にはラグランジュの未定乗数法の節を追加しました。また、各章に現実の事例を用いた演習問題を追加し、全体として演習問題を大幅に増やしました。

今回の改訂では、2022年度から高校で始まる新しい学習指導要領のもとのカリキュラムにも対応しています。高校の数学では、ベクトルがこれまでの「数学B」から「数学C」に移行するために、高校のいわゆる文系コースではベクトルを学ばなくなる可能性も出てきました。初版では、高校でベクトルを学んでいることを前提に書いていましたので、高校でベクトルを学んでいない読者でも十分理解できるように、ベクトルの部分は多くの加筆を行いました。

今回の改訂によって、本書がさらに多くの方の数学の学びの手助けになれば幸いです。

最後になりましたが、本書を使って一緒に授業をつくってきた仲間である大阪府立大学の数見哲也氏、吉富賢太郎氏、水野有哉氏、大内本夫氏に感謝申し上げますとともに、第2版の発行を快く承諾してくださった共立出版の関係者の皆様に感謝申し上げます。

2021年1月

川添 充、岡本真彦