まえがき

空間に住んでいる私たちは，空間に浮いているシャボン玉を視覚的に捉えて，その形を描くことができます．この理由を，まずは考えてみましょう．私たちが住んでいる空間は，数学的には，3 次元ユークリッド空間とよばれる空間です．以下，この空間を $\mathbb{R}^3$ と表すことにします．仮に，私たちが，$\mathbb{R}^3$ ではなくシャボン玉に住んでいるとすると，私たちはシャボン玉の形を描くことができるのでしょうか？

このとき，シャボン玉を外から眺めることができないので，その形を描くことはできません．このように，ある物の形を描くことができるのは，その物がある空間に入っていて，私たちがその空間の住人である場合です．

微分幾何学の言葉では，$\mathbb{R}^3$ は 3 次元リーマン多様体とよばれるものの 1 つです．また，シャボン玉は $\mathbb{R}^3$ 内の 2 次元リーマン部分多様体とよばれるものの 1 つです．$\mathbb{R}^3$ 内にあることを忘れると，シャボン玉自体は，2 次元リーマン多様体とよばれるものです．一般に，ある n 次元リーマン多様体 M の形を描くためには，M をより次元の高い $(n+r)$ 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+r}$ 内に埋め込む必要があります．この埋め込みは，微分幾何学の用語で “等長埋め込み” とよばれます．

このように，あるものを同種の良いものの中に埋め込んでその姿を捉えるということは，微分幾何学に限らず，数学の各分野において行われます．例えば，ある群 G の姿を捉えるために，G を良い群，例えば，n 次元直交群 $O(n)$ の中に埋め込みます．この埋め込みは，群の表現論の用語で “忠実な直交表現” とよばれるものです．この埋め込んだものを $O(n)$ の住人になって眺めることにより G の姿を捉えることができるのです．顕著な群の表現として，他にユニタリー表現があります．

上述のユークリッド空間の例に限らず，一般のリーマン多様体内のリーマン部分多様体を調べる理論が，リーマン部分多様体論です．一方，重力を記述する一般相対性理論で取り扱う時空は 4 次元ローレンツ多様体とよばれるものであり，時空内で，空間的部分多様体，時間的部分多様体，光的部分多様体等

が定義されます．リーマン部分多様体，およびローレンツ多様体内の空間的部分多様体と時間的部分多様体を包括した概念として，擬リーマン部分多様体という概念があります（光的部分多様体は擬リーマン部分多様体でないことに注意）．第５章の後半で扱う擬リーマン部分多様体論は，このように，各々の部分多様体を個別に調べるのではなく，まとめてより広い枠組みで調べる理論です．その前の第２章と第３章では，擬リーマン部分多様体論への入り口として，擬ユークリッド空間内の曲線・超曲面論について紹介します．この章を含めたことで，多様体の概念を学んでいない数学系の学部２年生から，本書の内容を読み進めることができるのではないかと期待しています．

本書の第４章では，多様体論における基礎概念，および基本的事実について述べることにします．第５章では，前半部で擬リーマン多様体論について，後半部では擬リーマン部分多様体論について，それぞれ基礎概念，および基本的な公式等を述べることにします．第６章では，前半部でリー群，リー代数，リー群作用（リー群の表現を含む）を定義し，リー群作用の軌道幾何について述べることにします．後半部では，対称空間のイソトロピー表現，対称空間上の超極作用を定義し，それらの主軌道が重要な部分多様体の例を与えることを述べます．この章を読むことで，様々な部分多様体のモデルは，外の空間がユークリッド空間の場合はリー群の表現の軌道として与えられ，外の空間が一般のリーマン多様体の場合はリー群作用の軌道として与えられることを認識することができます．このように，部分多様体幾何学とリー群作用の軌道幾何学は，密接な関わりをもちます．

第７章では，最初に定曲率空間内の等径超曲面，擬ユークリッド空間内の等径部分多様体，コンパクト型対称空間内の等焦部分多様体について紹介し，後半部では実解析的部分多様体の複素化を定義し，非コンパクト型対称空間内の複素等焦部分多様体について紹介します．

第８章では，解析力学におけるラグランジュ部分多様体について紹介します．解析力学におけるハミルトン方程式は，位置と運動量に関する方程式であり，位置と運動量の組全体のなす空間である“配位空間の余接バンドル”（これは理論物理学の分野では相空間とよばれるもの）上の方程式とみなされます．この余接バンドルには，シンプレクティック形式とよばれる微分形式が自然に定まり，シンプレクティック多様体とよばれるものになります．解析力学

では，一般のシンプレクティック多様体内のラグランジュ部分多様体とよばれる部分多様体を調べることが重要です．また，自然界に存在する 4 つの力，重力・電磁気力・強い力・弱い力を統一的に扱おうとする**大統一理論** (**grand unified theory**) を目指す 4 次元超弦理論の構築に向けて重要である，カラビ・ヤウ多様体全体のなす集合におけるミラー対と密接な関わりをもつ特殊ラグランジュ部分多様体を紹介します．

第 9 章では，素粒子理論として扱われるゲージ理論において，無限次元部分多様体論が重要であることを見ていきます．例えば，ゲージ理論において，ゲージ軌道とよばれる無限次元部分多様体の構造を調べることが重要です．また，無限次元部分多様体論と有限次元部分多様体論との繋がりについても解説します．

本書は，理論物理学における一般相対性理論・ゲージ理論・超弦理論と密接に関わる部分多様体幾何学や各種の部分多様体のモデルを与えるリー群作用の軌道幾何学の基礎知識をえられるよう執筆しました．また，微分幾何学と代数学・解析学・理論物理学の懸け橋になることも目指しています．

本書の主な読者対象は，微分幾何学，および一般相対性理論・ゲージ理論・超弦理論をはじめとする理論物理学に興味をもつ数学系の学部 2 年生以上の学生の皆様を想定していますが，理論物理学系の方にも，是非読んでいただければと願っています．

最後に，本書の編集にあたりいろいろとお世話になりました髙橋萌子さんをはじめ，共立出版編集部の皆様方に感謝の意を表します．

2021 年 2 月

小池直之