

目 次

第 0 章 準備	1
0.1 微分法の復習	2
0.1.1 微分係数・導関数	2
0.1.2 基本関数の導関数	3
0.1.3 微分の計算方法	3
0.1.4 高階導関数	4
0.1.5 ベキ級数展開	6
0.1.6 Euler の公式	7
0.1.7 偏微分	7
0.2 積分法の復習	8
0.2.1 原始関数	8
0.2.2 定積分と不定積分	8
0.2.3 基本関数の不定積分	10
0.2.4 有理式の積分	10
0.2.5 置換積分法	11
0.2.6 部分積分法	12
0.2.7 三角関数の積の積分	12
0.2.8 面積・体積・曲線の長さ	13
0.3 線形数学の復習	14
0.3.1 ベクトル	14
0.3.2 行列	15
0.4 物理現象の基本的な扱い	20
0.4.1 速度・加速度	20
0.4.2 Newton の運動方程式	22
0.4.3 運動方程式の時間積分と運動量保存則	24
0.4.4 運動方程式の空間積分と力学的エネルギー保存則	25
0.4.5 電気回路と素子	26

第 1 章	微分方程式概説	29
1.1	微分方程式の定義	30
1.2	代表的な微分方程式	32
1.3	微分方程式の種類	33
1.3.1	常微分方程式と偏微分方程式	33
1.3.2	線形微分方程式と非線形微分方程式	34
1.3.3	同次微分方程式と非同次微分方程式	34
1.4	初期値問題と境界値問題	35
1.4.1	初期値問題	35
1.4.2	境界値問題	35
1.5	解軌道と勾配場	36
1.6	連立微分方程式	36
1.7	モデル化・微分方程式を作る方法	37
1.8	微分方程式の解の存在と一意性	39
第 2 章	1 階微分方程式	43
2.1	変数分離法	44
2.1.1	変数分離法	44
2.1.2	変数分離型へ変換できるもの	50
2.2	積分因子法	52
2.2.1	定数係数微分方程式の場合	52
2.2.2	係数が関数の微分方程式の場合	56
2.3	非同次微分方程式の一般解	58
2.3.1	未定係数法	58
2.3.2	定数変化法	64
2.4	Bernoulli 型, Riccati 型, Clairaut 型	66
2.5	完全微分形	70
2.6	発展的応用	76
2.6.1	年代測定と贋作鑑定	76
2.6.2	ロケットの燃料はどれだけ必要か	78
2.6.3	水時計の設計	80
2.6.4	研究課題 1: 空気抵抗	82
2.6.5	研究課題 2: 広告の威力	83
2.6.6	研究課題 3: 伝染病の流行モデル	84
第 3 章	2 階および高階線形微分方程式	87
3.1	2 階の定数係数同次線形微分方程式	88
3.1.1	概略	88
3.1.2	解の重ね合わせ	89
3.1.3	解の存在と一意性	90
3.1.4	関数の 1 次独立・1 次従属	91

3.1.5	特性方程式	94
3.1.6	初期値問題	97
3.2	2階の定数係数非同次線形微分方程式	102
3.2.1	解の構造	102
3.2.2	未定係数法	102
3.2.3	定数変化法	111
3.3	2階の変数係数非同次線形微分方程式	114
3.3.1	一般的な議論	114
3.3.2	変数係数の同次微分方程式	114
3.3.3	変数係数の非同次微分方程式	115
3.3.4	Eulerの微分方程式	117
3.4	高階の定数係数同次線形微分方程式	118
3.5	境界値問題	120
3.6	発展的応用	124
3.6.1	重力による単振動	124
3.6.2	重力と浮力による単振動	125
3.6.3	RLC並列回路	126
3.6.4	懸垂線	127
3.6.5	最速降下線(変分法の紹介)	128
3.6.6	研究課題:地球を貫くトンネル	130
第4章	連立微分方程式と解の定性的分類	131
4.1	連立微分方程式の例	132
4.2	線形連立微分方程式	134
4.3	微分方程式の大域理論	136
4.3.1	臨界点	136
4.3.2	安定性	137
4.3.3	固有値が2つの異なる実数の場合	137
4.3.4	固有値が共役な複素数の場合	140
4.3.5	固有値が縮退する場合	143
4.3.6	まとめ	145
4.4	定数係数連立微分方程式の一般的な取り扱い	146
4.4.1	解核行列	146
4.4.2	対角化可能な行列の場合	148
4.4.3	一般スペクトル分解を用いた表現	149
4.5	非同次連立微分方程式	150
4.5.1	一般解導出の方針	150
4.5.2	システム制御と安定性解析	152
4.6	発展的応用	154
4.6.1	軍備競争モデル	154

4.6.2	連成振動	156
4.6.3	相互誘導回路	158
4.6.4	捕食者/被食者モデル	160
第 5 章	Laplace 変換による解法	163
5.1	Laplace 変換	164
5.2	Laplace 逆変換	170
5.3	微分方程式への応用	172
第 6 章	級数解	175
6.1	級数解による求積	176
6.2	特異点	178
6.3	確定特異点のまわりの級数解	180
6.4	Legendre の微分方程式	182
6.5	Bessel の微分方程式	186
6.6	自己随伴形の微分方程式	188
第 7 章	数値的手法	191
7.1	プログラムを組む方法	192
7.1.1	数値計算の注意点	192
7.1.2	数値計算による微分	194
7.1.3	数値計算による積分	196
7.1.4	数値計算による微分方程式の解法	198
7.1.5	Runge-Kutta 法	200
7.1.6	刻み幅 Δx はどう決めるか	202
7.1.7	他の数値解法	202
7.1.8	2 階の微分方程式の数値解法	203
7.2	<i>Mathematica</i> を使う方法	204
7.2.1	基本的な数式処理	204
7.2.2	代数計算	206
7.2.3	関数の定義, 微分・積分	207
7.2.4	基本的な描画・プロット	208
7.2.5	微分方程式を解く	210
7.2.6	ベクトル場を描く	211
7.2.7	行列計算	212
7.2.8	練習問題	213
7.2.9	単振り子の近似限界	214
7.2.10	3 種類の生物の Lotka-Volterra モデル	216

参考文献	218
問題・章末問題の答	220
索 引	229



コラム一覧

1	世の中すべて微分方程式 (!?)	28
2	放射性炭素年代測定法	47
3	ベルタランフィの一般システム理論	67
4	力学と電気回路のアナロジー	73
5	フェルメールの贋作事件	77
6	ロケットが多段式な理由	79
7	追跡曲線 トラクトリクス (tractrix)	85
8	共振回路	107
9	共振によるつり橋の落下	110
10	殺虫剤の効果	162
11	Legendre 多項式と多重極展開	179
12	球面調和関数	185
13	円形の膜の振動	190
14	2次方程式の解の公式と桁落ち誤差	193
15	Fehlberg 法 (5次精度の Runge-Kutta 法)	201
16	数値計算結果の収束次数	203