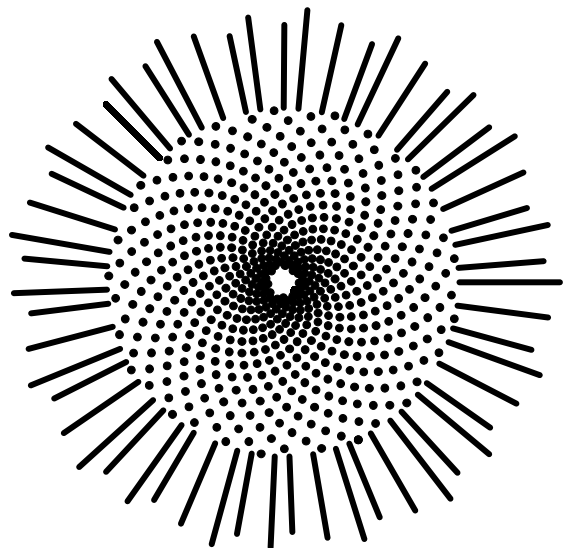


ひまわりの螺旋 II 部



来嶋大二

II 部序文

「ひまわりの螺旋」ではゴールデンフラワーの作図方法や、何故そこにフィボナッチ数の螺旋が見られるのか、ということ考察した。II部では、黄金格子や四つの連分数で表される格子が他の格子と比べてどこが違うのか、黄金格子あるいは四つの格子が特別であるという理由を説明できないかということに焦点を当てている。まずは「格子の分布係数」を次のように定義する。

格子 Λ において、2 格子点間の距離の最小値を $\delta(\Lambda)$ と書き、格子点を 4 頂点とする平行四辺形の面積の最小値を $d(\Lambda)$ とかく。このとき格子 Λ の分布係数を

$$U(\Lambda) = \frac{\delta(\Lambda)^2}{d(\Lambda)}$$

と定義する。

無理数 w で定まる格子 $\Lambda(w, c)$ において、 $OP = \delta(\Lambda(w, c))$ となる点 P 、即ち OP が 2 格子点間の最小値を与える点 P で y 座標が 0 以上である点は、 n 次主近似格子点 P_n , ($n \geq 0$) か $P_{-1}(-1, 0)$ の中に存在する。よって

$$U(\Lambda(w, c)) = \text{Min} \left\{ \frac{(OP_n)^2}{c}, n \geq -1 \right\}$$

となる。

分布係数 $U(\Lambda(w, c))$ の式において $n \geq 1$ としたものを $V_{(w,+)}(c)$ と書き、それを c の関数と考えて w の全分布関数という。

全分布関数の最小値が大きいほどどんな c に対しても、 $\Lambda(w, c)$ の格子点がより均一に分布していると考えられる。 $n \geq 1$ とした理由は 1 次以上の主近似格子点が原点に一番近くなるような小さな c に限定して均一度を考えようというわけである。 $P_{-1}(-1, 0)$ は w に

関係のない定点だし, $P_0(w - [w], c)$ は w の小数部分だけに関係した点で主近似既約分数の近似度とは関係していない. 12章の主定理は次である.

定理 0より大きく $1/2$ より小さい無理数のなかで全分布関数の最小値が最大なものは $\omega = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ である.

4つの格子について言えば, この4つの格子を定める4つの無理数の全分布関数の最小値が大きい方から順に4つを占めるわけではない. 全分布係数の定義において $n \geq 2$ としても, すなわち主近似格子点を2次以上に絞っても同様である. 従って n 次以上という絞り方ではなく, c の範囲を絞って, ある数 d より小さい, としてみた. そうすると d の値によっては4つの格子が上位の四つになることが分かった. ただしその計算はここでは省略している.

以上の考察を進めるなかで, $\Lambda(w, c)$ の主近似格子点 P_n でどんな c に対しても線分 OP が2格子点間の距離の最小値にならない例を見つけたり, あるいは黄金比と対等な無理数の全分布関数の極小値の動向を調べたりした.

「ひまわりの螺旋」および「ひまわりの螺旋II部」に載せた図は, 殆どを「GRAPES」という関数グラフソフトで作成した. 特にII部では作図だけではなく, 計算結果の検算やいくつかの例を見つけることにも用いた. お礼を書くのがII部の序文の最後になりましたが, ソフトの作者である友田勝久先生に深く感謝いたします. 作図ソフトは <http://www.osaka-kyoiku.ac.jp/~tomodak/grapes/> で入手できます.

2011年12月
来嶋大二

目次

第10章 分布係数	1
10.1 分布係数 $U(\Lambda)$	1
10.2 n 次分布関数	4
第11章 n 次極小点	13
11.1 n 次極小点	13
11.2 最良近似	16
第12章 黄金格子	21
12.1 黄金格子の近似格子点	21
12.2 ω の n 次極小点	29
12.3 黄金格子の均一度	30
第13章 四つの連分数	39
13.1 無理数の対等	39
13.2 黄金比と対等な無理数	43
13.3 新たな評価法	52
13.4 近似分数の生成アルゴリズム	54
関連図書	59
索引	60

第10章 分布係数

実数 w と正の数 c に対してベクトル $\mathbf{a} = (1, 0)$, $\mathbf{b} = (w, c)$ を基底とする格子を $\Lambda(w, c)$ と書く. 特に断らない限り $\Lambda(w, c)$ における w は無理数とする. $\Lambda(w, c)$ の n 次主近似格子点を $\mathbf{P}_n, (n \geq 0)$ と書く.

10.1 分布係数 $U(\Lambda)$

定義 10.1 分布係数

格子 Λ において, 2 格子点間の距離の最小値を $\delta(\Lambda)$ と書き, 格子点を 4 頂点とする平行四辺形の面積の最小値を $d(\Lambda)$ とかく. このとき格子 Λ の分布係数 $U(\Lambda)$ を

$$U(\Lambda) = \frac{\delta(\Lambda)^2}{d(\Lambda)}$$

と定義する.

■分布係数 $U(\Lambda)$ の最大値

格子 Λ を原点の回りに回転しても $U(\Lambda)$ の値は変わらない. また格子 Λ を x 軸方向, y 軸方向にそれぞれ同じだけ拡大, あるいは縮小してもその値は変わらない. それでは $U(\Lambda)$ の値はどのような範囲にあるだろうか. t を 1 より大きい数とする.

$$\mathbf{a} = (t, 0), \mathbf{b} = (0, \frac{1}{t})$$

を基底とする格子 Λ を考える. このとき

$$d(\Lambda) = |\mathbf{a}| \times |\mathbf{b}| = 1, \quad \delta(\Lambda) = \frac{1}{t}$$

となる. したがって, t を大きくすれば $U(\Lambda) = \frac{1}{t^2}$ は 0 に近づいていく. 次に $U(\Lambda)$ の上限を考える.

辺の長さが 1 の正三角形の面積を, 図 10.1 で計算すると

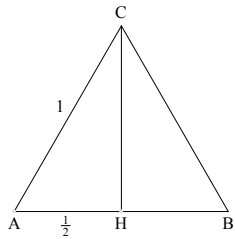


図 10.1 正三角形

$$CH = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{より} \quad \Delta ABC = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

である. いま $\delta(\Lambda) = 1$ として, $d(\Lambda)$ の最小値を求める. $AB = 1$ となるような二つの格子点 A, B を考え, 点 C を ΔABC の周または内部には 3 頂点以外には格子点がないような格子点とする. ΔABC の面積は $\frac{d(\Lambda)}{2}$ である.

ΔABC の面積が最小となるように C を決めたい. C は A, B からの距離が 1 以上であり, また必要ならベクトル \overrightarrow{AB} の整数倍だけ C を平行移動することにより C は図 10.2 のグレーの部分にあると考えてよい. よって C がこの領域を動くとき, 直線 AB に最も近い点で $d(\Lambda)$ は最小となり, その値は

$$d(\Lambda) = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

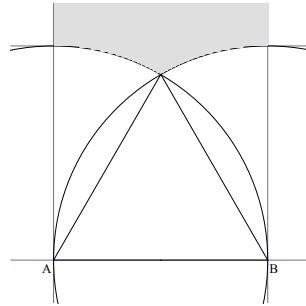


図 10.2 正三角形と円

である. よって

$$U(\Lambda) = \frac{\delta(\Lambda)^2}{d(\Lambda)} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1.1547\dots$$

となり, これが $U(\Lambda)$ の最大値である.

■ P_{-1} について

無理数 w の主近似分数を求める表 10.1 を書く.

n	-1	0	1	2	3	4	5	...
k_n		k_0	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	...
p_n	1	k_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	...
q_n	0	1	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	...

表 10.1

n 次主近似分数は $\frac{p_n}{q_n}$ であり, n 次主近似格子点 P_n の座標は $(q_n w - p_n, c q_n)$ であった. $n = 0$ のとき $p_0 = k_0 = [w]$, $q_0 = 1$ なので 0 次主近似格子点 P_0 の座標は $P_0(w - [w], c)$ である. $n = -1$ のときは $p_{-1} = 1$, $q_{-1} = 0$ と考えて,

$$(q_{-1} w - p_{-1}, c q_{-1}) = (-1, 0)$$

を P_{-1} とする.

命題 10.2 格子 $\Lambda(w, c)$ において, P を OP が 2 格子点間の距離の最小値となるような格子点 P とする. このとき P または原点に関して P と対称な点は n 次主近似格子点 P_n ($n \geq 0$) または P_{-1} である.

証明：命題 8.10 で示したように、 P が第 1 象限または第 2 象限にあるとき、 OP が 2 格子点間の距離の最小値ならば P は 0 次以上の主近似格子点であった。 P が第 3 象限あるいは第 4 象限にあるときは、原点に関して P と対称な点を考えればよい。 P が x 軸上にあるときは、 P または P と対称な点が P_{-1} となる。□

系 10.3 格子 $\Lambda(w, c)$ において

$$U(\Lambda(w, c)) = \text{Min} \left\{ \frac{(OP_n)^2}{c}, n \geq -1 \right\} \quad (10.1)$$

となる。

10.2 n 次分布関数

定義 10.4 n 次分布関数 $V_{(w,n)}(c)$

格子 $\Lambda(w, c)$ において、

$$V_{(w,n)}(c) = \frac{(OP_n)^2}{c}, \quad (n \geq -1)$$

を c についての関数と考えるとき、 w の n 次分布関数という。 c は x という文字を使うこともある。 P_n の座標は $(q_n w - p_n, cq_n)$ なので

$$V_{(w,n)}(c) = \frac{(q_n w - p_n)^2 + (cq_n)^2}{c} = c(q_n)^2 + \frac{1}{c}(q_n w - p_n)^2$$

である。

例 10.5 0 次分布関数と -1 次分布関数

0 次主近似格子点の座標は $P_0(w - [w], c)$ であり

$$V_{(w,0)}(c) = \frac{(OP_0)^2}{c} = \frac{(w - [w])^2 + c^2}{c} = c + \frac{1}{c}(w - [w])^2$$

となる。 $n = -1$ のときは $P_{-1}(-1, 0)$ なので

$$V_{(w,-1)}(c) = \frac{(OP_{-1})^2}{c} = \frac{1}{c}$$

となる。

定義 10.6 全分布関数 $V_{(w,+)}(c)$

w の分布係数 $U(\Lambda(w, c))$ の式 (10.1) において $n \geq 1$ とし、更にこれを c の関数と考えたものを $V_{(w,+)}(c)$ と書き、これを w の全分布関数という。すなわち

$$V_{(w,+)}(c) = \text{Min} \left\{ \frac{(OP_n)^2}{c}, n \geq 1 \right\}$$

とおく。全分布関数は c を x として $V_{(w,+)}(x)$ と書くこともある。

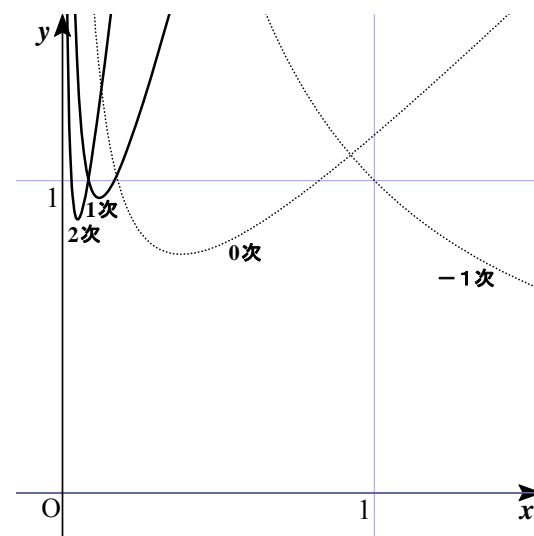


図 10.3 1, 2 次の分布関数のグラフ

例 10.7 1次分布関数と2次分布関数

図 10.3 では $w = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ の 1 次と 2 次の分布関数 $y = V_{(w,1)}(x)$ と $y = V_{(w,2)}(x)$ のグラフを実線で表わし, -1 次と 0 次の分布関数のグラフは点線で表わしている.

図 10.4 は n 次分布関数 $\{y = V_{(w,n)}(x), n = 1, 2, 3, 4\}$ のグラフである. 全分布関数:

$$V_{(w,+)}(x) = \text{Min}\{V_{(w,n)}(x), (n \geq 1)\}$$

のグラフは, 図 10.4 ではほぼ $y = 1$ より下の部分に相当している.

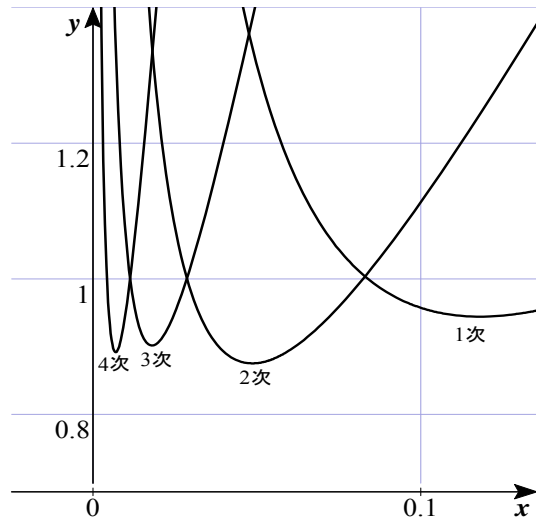


図 10.4 1,2,3,4 次の分布関数のグラフ

全分布関数 $V_{(w,+)}(x)$ の最小値が大きいほど, どんな c に対しても $\Lambda(w, c)$ の格子点がより均一に分布していると考えられる. $n \geq 1$ とした理由は II 部序文で述べたとおりである.

例 10.8 正三角形格子の例

三つの主近似格子点 P_0, P_1, P_2 と原点との距離が同じで分布係数 $U(\Lambda)$ が最大値 $\frac{2}{\sqrt{3}}$ を取る例を与える. w として無理数ではないが

$w = \frac{5}{14}$ とおく. w の連分数は $[0, 2, 1, 4]$ でその主近似既約分数は 0 次, 1 次, 2 次が

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{0}{1}, \frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{2}, \frac{p_2}{q_2} = \frac{1}{3}$$

である. 格子 $\Lambda(w, c)$ における主近似格子点 P_0, P_1, P_2 の座標は

$$P_0(w, c), P_1(2w - 1, 2c), P_2(3w - 1, 3c)$$

である. n 次分布関数の式

$$V_{(w,n)}(x) = (q_n)^2 x + (q_n w - p_n)^2 \times \frac{1}{x}$$

において 0 次, 1 次, 2 次の式はそれぞれ次のようになる.

$$0 \text{ 次: } y = x + \left(\frac{5}{14}\right)^2 \times \frac{1}{x}$$

$$1 \text{ 次: } y = 2^2 x + \left(2 \times \frac{5}{14} - 1\right)^2 \times \frac{1}{x}$$

$$2 \text{ 次: } y = 3^2 x + \left(3 \times \frac{5}{14} - 1\right)^2 \times \frac{1}{x}$$

図10.5で0次, 1次, 2次の分布関数のグラフを書いているが, これらの曲線は1点で交わっている. 交点の座標を計算してみると,

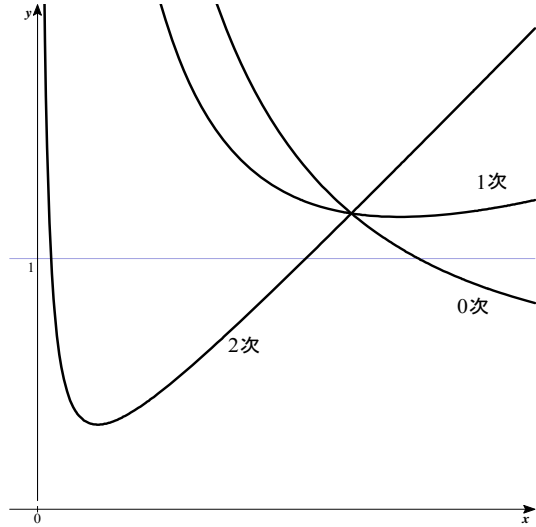


図10.5 $w = \frac{5}{14}$ の1,2,3次の分布関数

点 $\left(\frac{\sqrt{3}}{14}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ となる. $c = \frac{\sqrt{3}}{14}$ で0次, 1次, 2次の分布関数の値が一致するので

$$OP_0 = OP_1 = OP_2$$

となっている. また交点の y 座標は分布係数の最大値 $\frac{2}{\sqrt{3}}$ である.

格子 $\Lambda\left(\frac{5}{14}, \frac{\sqrt{3}}{14}\right)$ の図10.6をあげておく.

(領域は $-1 \leq x < 1$, $0 \leq y < 2$ の範囲である.)

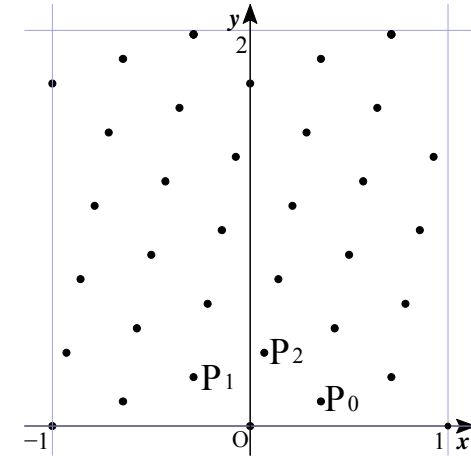


図10.6 正三角形格子

例10.9 反例

命題9.3, (2) \Rightarrow (3)の逆は成立しないという反例を与える. すなわち $P(q_n w - p_n, q_n c)$ は $\Lambda(w, c)$ の主近似格子点であるが, どんな c に対しても, OP が2格子点間の距離の最小値にならないような例を与える. 連分数 $[0, 2, 2, 1, 3, 1, 1, \dots]$ で表わされる無理数 w は

$$w = \frac{158}{375 - \sqrt{5}}$$

である.

$$y = 2^2 x + \frac{1}{x} (2w - 1)^2$$

$$y = 5^2 x + \frac{1}{x} (5w - 2)^2$$

$$y = 7^2 x + \frac{1}{x} (7w - 3)^2$$

がそれぞれ1次, 2次, 3次の分布関数である. 1次と3次の分布関

数の交点の座標 (s, t) は,

$$s = \sqrt{\frac{-45w^2 + 38w - 8}{45}}, t = 2^2s + \frac{1}{s}(2w - 1)^2$$

となる. 近似値は $(s, t) = (0.02216, 1.1350)$ である. また w の 2 次

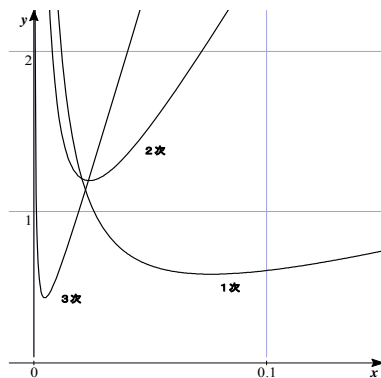


図 10.7 反例

分布関数の最小値を取る点の座標は

$$\left(\left| w - \frac{2}{5} \right|, 2 \times 5^2 \left| w - \frac{2}{5} \right| \right) = (0.0239, 1.193)$$

である (定理 11.2 参照). 図 10.7 から分かるように 1 次, 2 次, 3 次の分布関数の値を比べると 2 次分布関数の値が最小となることはない. したがって $\Lambda(w, c)$ においては c の値に関わらず主近似格子点 P_2 が原点 O に一番近い格子点ではない. なお 2 次分布関数の最小値が 1.193 で分布係数の最大値 $\frac{2}{\sqrt{3}} = 1.1547$ より大きいことから, P_2 が原点に一番近い格子点にはなりえないことが分かる. 図 10.8 は w の 2 次分布関数が最小値を取る点の x 座標 $|w - \frac{2}{5}|$ を c と

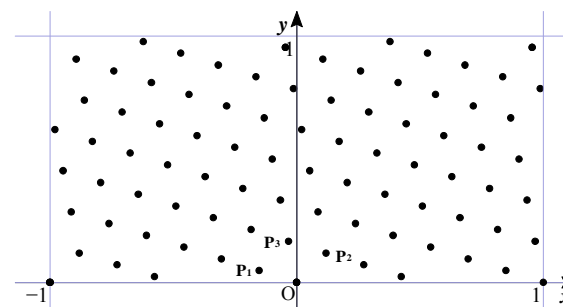


図 10.8 反例 (格子)

したときの格子

$$\Lambda \left(w, \left| w - \frac{2}{5} \right| \right)$$

を書いたものである. 2 次主近似格子点 $P_2(5w - 2, |5w - 2|)$ と原点 O を結ぶ直線の傾きは 1 となっている (系 11.3 参照). 命題 9.3 より P_2 は第 1 象限では原点に一番近い格子点であるが第 2 象限まで含めると一番近い格子点ではない.

第11章 n 次極小点

無理数 w の n 次主近似既約分数を $\frac{p_n}{q_n}$, n 次全商を v_n と書く.

11.1 n 次極小点

定義 11.1 n 次極小点

$n \geq 0$ のとき w の n 次分布関数 $V_{(w,n)}(x)$ が最小値となる曲線上の点を w の n 次極小点という.

定理 11.2 w の n 次極小点の座標は

$$\left(\left| w - \frac{p_n}{q_n} \right|, 2q_n^2 \left| w - \frac{p_n}{q_n} \right| \right)$$

である.

証明 : 関数

$$y = V_{(w,n)}(x) = x(q_n)^2 + \frac{1}{x}(q_n w - p_n)^2, \quad (x > 0)$$

の最小値と, そのときの x の値を計算する. 相加平均と相乗平均の関係を利用すると

$$\begin{aligned} x(q_n)^2 + \frac{1}{x}(q_n w - p_n)^2 &\geq 2\sqrt{x(q_n)^2 \times \frac{1}{x}(q_n w - p_n)^2} \\ &= 2q_n^2 \left| w - \frac{p_n}{q_n} \right| \end{aligned}$$

より, $2q_n^2 \left| w - \frac{p_n}{q_n} \right|$ が最小値であり, そのときの x の値は

$$x(q_n)^2 = \frac{1}{x}(q_n w - p_n)^2$$

より

$$x = \left| w - \frac{p_n}{q_n} \right|$$

のときに最小値をとる. したがって w の n 次極小点の座標は

$$\left(\left| w - \frac{p_n}{q_n} \right|, 2q_n^2 \left| w - \frac{p_n}{q_n} \right| \right)$$

である. \square

系 11.3 w の n 次極小点の x 座標を c とするとき, $\Lambda(w, c)$ の n 次主近似格子点 P_n と原点 O を結ぶ線分の傾きは ± 1 である.

証明: 定理 11.2 より n 次極小点の x 座標は $\left| w - \frac{p_n}{q_n} \right|$ である. よってこの値を c とすると n 次主近似格子点の座標は

$$P_n \left(q_n w - p_n, q_n \left| w - \frac{p_n}{q_n} \right| \right) = P_n(q_n w - p_n, |q_n w - p_n|)$$

となり, P_n は直線 $y = \pm x$ 上にある. \square

w の連分数を $[0, k_1, k_2, \dots]$ とおく. 格子 $\Lambda(w, c)$ の n 次主近似格子点を P_n とすると, P_n の座標は $(q_n w - p_n, c q_n)$ であった. したがって n 次極小点の座標を (s_n, t_n) とするとき,

$$\frac{L(OP_n)}{c} = q_n^2 \left| w - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{t_n}{2} = q_n^2 s_n$$

となる. n 次極小点の x 座標からなる数列 $s_n = \left| w - \frac{p_n}{q_n} \right|$ は単調に減少している (次節「最良近似」参照).

補題 11.4 次が成立する. ただし $n \geq 1$ とする.

(1)

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = [k_n, k_{n-1}, \dots, k_1]$$

(2)

$$\begin{aligned} q_n^2 \left| w - \frac{p_n}{q_n} \right| &= \frac{1}{v_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n}} \\ &= \frac{1}{[k_{n+1}, k_{n+2}, \dots] + \frac{1}{[k_n, k_{n-1}, \dots, k_1]}} \end{aligned}$$

(1) の証明: 定理 6.7 の記法に従うと $S_n = A_0 A_1 \cdots A_n$ の成分は

$$\begin{pmatrix} k_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} k_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix}$$

となる. 両辺の転置行列は

$$\begin{pmatrix} k_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} k_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & q_n \\ p_{n-1} & q_{n-1} \end{pmatrix}$$

となる. よって

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} k_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} k_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} p_n & q_n \\ p_{n-1} & q_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} p_n & q_n \\ p_{n-1} & q_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -k_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_n & p_n - k_0 q_n \\ q_{n-1} & p_{n-1} - k_0 q_{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって定理 6.7(2) より

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = [k_n, \dots, k_1]$$

となる.

(2) の証明 : (系 6.12 の証明を参照のこと)

$$q_n^2 \left| w - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{q_n}{q_n v_{n+1} + q_{n-1}} = \frac{1}{v_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n}}$$

主張 (2) の 2 番目の等式は (1) より導かれる. \square

11.2 最良近似

無理数 w と既約分数 $\frac{p}{q}$ に関する二つの条件 $(a_1), (a_2)$ を考える.
(これまでと同様, 既約分数の分母は正とする.)

(a_1) $\frac{p}{q} \neq \frac{p'}{q'}$, $q' \leq q$, $\left| w - \frac{p}{q} \right| \geq \left| w - \frac{p'}{q'} \right|$ となる既約分数 $\frac{p'}{q'}$ は存在しない.

(a_2) $\frac{p}{q} \neq \frac{p'}{q'}$, $q' \leq q$, $|qw - p| \geq |q'w - p'|$ となる既約分数 $\frac{p'}{q'}$ は存在しない.

同じく無理数 w と既約分数 $\frac{p}{q}$ に関する二つの条件 $(b_1), (b_2)$ を考える. ただし $P(qw - p, qc)$ は $\Lambda(w, c)$ の格子点で, Q は y 軸に関して P と対称な点とする.

(b_1) 三角形 OPQ の周または内部には O と P 以外には格子点は存在しない.

(b_2) $L(OP)$ と $L(OQ)$ には O と P 以外には格子点は存在しない.

条件 $(a_1), (a_2)$ と $(b_1), (b_2)$ の関係を考える. $\Lambda(w, c)$ の二つの格子点を

$$P(qw - p, qc), P'(q'w - p', q'c)$$

とすると, 直線 OP , OP' の傾きはそれぞれ

$$\frac{c}{w - \frac{p}{q}}, \frac{c}{w - \frac{p'}{q'}}$$

である. よって不等式

$$\left| w - \frac{p}{q} \right| \geq \left| w - \frac{p'}{q'} \right|$$

は直線 OP' の傾きの絶対値が直線 OP の傾きの絶対値以上であることを意味する. 従って $q' \leq q$ のとき, この不等式は P' が三角形 OPQ の周または内部に存在することを意味する. これより無理数 w と既約分数 $\frac{p}{q}$ に関する条件 (a_1) と条件 (b_1) は同値であることがわかる. また条件 (a_2) と条件 (b_2) が同値であること, および (b_2) ならば (b_1) が成立することは明らかである.

定理 11.5 $\Lambda(w, c)$ の格子点 P について, 次が成立する. (ただし P は 0 次主近似格子点 P_0 ではないとする.)

(1) P は (b_2) を満たす $\Leftrightarrow P$ は主近似格子点である

(2) P は (b_1) を満たす $\Rightarrow P$ は近似格子点である

証明 : 定理 8.10 で (1) を示している. (2) について, P は (b_1) を満

となる. また補題 11.4 より

$$\frac{P_{n-2}I}{P_{n-1}H} = \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}} = \frac{1}{[k_{n-1}, k_{n-2}, \dots, k_1]}$$

である. よって

$$\begin{aligned} AP_n < P_{n-2}B &\Leftrightarrow \frac{1}{[k_{n+1}, k_{n+2}, \dots]} < \frac{1}{[k_{n-1}, k_{n-2}, \dots, k_1]} \\ &\Leftrightarrow [k_{n-1}, k_{n-2}, \dots, k_1] < [k_{n+1}, k_{n+2}, \dots] \end{aligned}$$

となる. したがって T_i が (b_1) を満たすための条件は

$$[k_{n-1}, k_{n-2}, \dots, k_1] < [k_{n+1}, k_{n+2}, \dots] \quad (11.1)$$

である.

第12章 黄金格子

本章では無理数 w は $0 < w < \frac{1}{2}$ の範囲にあるとする. 任意の無理数で定まる格子あるいはそれを y 軸に関して対称に移したものは, $0 < w < \frac{1}{2}$ の範囲の無理数 w で定まる格子 $\Lambda(w, c)$ によって実現できる. $0 < w < \frac{1}{2}$ のとき w の連分数は $k_0 = 0, k_1 \geq 2$ となる.

12.1 黄金格子の近似格子点

定義 12.1 黄金格子

黄金比 $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ と正の定数 c で定まる格子 $\Lambda(\phi, c)$ を考える.

$$\tau = \phi - 1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

で定まる格子 $\Lambda(\tau, c)$ は $\Lambda(\phi, c)$ と一致する. ϕ は 2 次方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の解であり, τ は $x^2 + x - 1 = 0$ の解である.

$$\omega = 1 - \tau = \tau^2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

で定まる格子 $\Lambda(\omega, c)$ と $\Lambda(\tau, c)$ は y 軸に関して対称となる. なお紛らわしいが, ω はギリシャ文字のオメガであり, w (ダブルユー) ではない.

ϕ, τ, ω の連分数を次に書いておく.

$$\phi = [1, 1, 1, 1, \dots]$$

$$\tau = [0, 1, 1, 1, \dots]$$

$$\omega = \tau^2 = [0, 2, 1, 1, \dots]$$

この章では ϕ , τ , ω と書けば上記の定数を意味するものとする. ω で定まる格子 $\Lambda(\omega, c)$ を, 黄金格子と言った.

図12.1は, ω で定まる黄金格子を $-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ の範囲で作図したものである. なお主近似格子点は下から順に P_0, P_1, \dots, P_6 と番号をつけている. c の値は 0.03 とした.

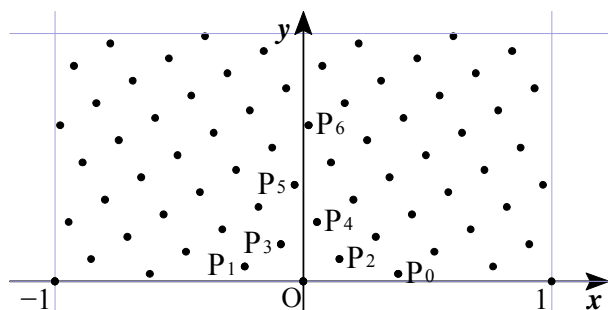


図 12.1 黄金格子

■黄金格子の主近似格子点

ω の主近似分数を計算する.

図12.1の主近似格子点 $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ は主近似既約分数

n	-1	0	1	2	3	4	5	6	...
k_n		0	2	1	1	1	1	1	...
p_n	1	0	1	1	2	3	5	8	...
q_n	0	1	2	3	5	8	13	21	...

表 12.1

$\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{13}, \frac{8}{21}$ に対応している (表 12.1 参照).

命題 12.2 ω の n 次主近似既約分数を $\frac{p_n}{q_n}$ とする. n 次主近似格子点の x 座標からなる数列

$$\{c_{n+1} = q_n \omega - p_n, n \geq 0\}$$

は公比 $-\tau$ の等比数列である.

証明: 二つの数列 $\{p_n, n \geq 0\}, \{q_n, n \geq 0\}$ は一般フィボナッチ数列なので (表 12.1 参照), 数列 $\{c_n, n \geq 1\}$ も一般フィボナッチ数列である. ここで

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{q_1 \omega - p_1}{q_0 \omega - p_0} = \frac{2\omega - 1}{\omega} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -\tau$$

である.

$$c_1 = \omega, c_2 = \omega(-\tau)$$

となるが, $-\tau$ は方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の解の小さいほうなので,

$$\{(-\tau)^n\}, n \geq 0$$

は一般フィボナッチ数列である. よって初項 ω , 第2項 $\omega(-\tau)$ の一般フィボナッチ数列の第 n 項は $\omega(-\tau)^{n-1}$ となる. 従って

$$c_n = \omega(-\tau)^{n-1}$$

となり, 数列 $\{c_n, n \geq 1\}$ は初項 $c_1 = \omega$, 公比 $-\tau$ の等比数列であることが示された. \square

■ひまわりの舌状花

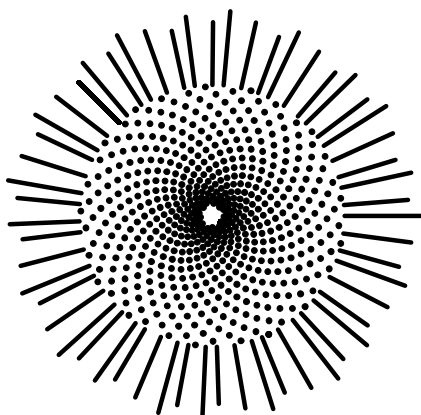


図 12.2 ひまわりの花

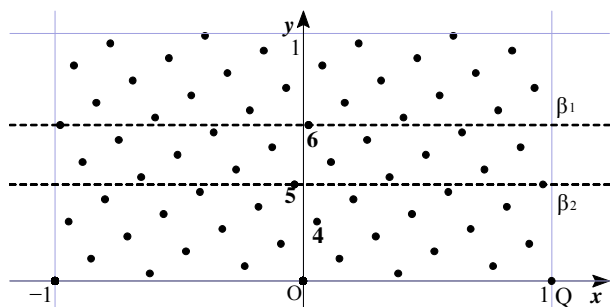


図 12.3 黄金格子

第1章のコラム「ひまわりの花の作図について」で、外側の舌状花にあたる部分の作図方を説明している。最後のほうで「円周は55個の点で55個の部分に分けられるが、その弧の長さは短いものと長いものの2種類しかなくその長さの比は黄金比となっている。」と

書いている。ここでその説明をする。図12.3は黄金格子であるが4次、5次、6次の主近似格子点を簡単に数字の4,5,6で表している。この図を利用し、舌状花の数は21として説明する。舌状花の数が34や55等、他のフィボナッチ数の場合も同様の説明である。

黄金格子の領域

$$D = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y\}$$

にある格子点のなかで6次主近似格子点 P_6 は下から21番目の点である。 P_6 より下にある20個の格子点から x 軸に垂線を下ろす。その垂線の足で線分 OQ は21個の区間に分けられる。線分 OQ に α と名前をつける。

いま α の長さを変えて図12.2の筒状花の回りの円周の長さとする。次に α の端の原点を、円周上の舌状花として最初に打った点の位置にあわせ、時計回りに α を巻きつける。このとき残りの20個の舌状花の位置と α の垂線の足の位置が一致する。このように考えると「垂線の足によって21個に分けられた線分 OQ の区間の長さは2種類しかなく、その比は黄金比である」ということを示せばよいことになる。図12.3では P_6 と P_5 を通り x 軸に平行な直線 β_1 と β_2 を点線で引いている。領域 D にある格子点で β_1 より下にあるものは20個あるが、これに原点を加えた21個の格子点の一つを A とする。また20個の格子点に、 O の代わりに Q を加えた21個の格子点を考え、その中の A より右側にある格子点で x 座標が最小な点を B とする。

このとき \overrightarrow{AB} は $\overrightarrow{OP_4}$ または $\overrightarrow{P_5O}$ と一致する。 \overrightarrow{AB} がどちらのベクトルと一致するかは A の位置によって定まる。即ち A が β_2 より下にある場合は $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP_4}$ となり、 β_2 より上か、 β_2 の線上にある場合は $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{P_5O}$ となる。

従って線分 OQ を21個の区間に分けたとき、長い区間の長さは $\overrightarrow{OP_4}$ の x 成分となり、短い区間の長さは $\overrightarrow{P_5O}$ の x 成分となる。よつ

てその長さの比は命題 12.2 より黄金比である.

■ フィボナッチ文字列の漸化式

つぎに第7章のコラム「フィボナッチ文字列(2)」にある漸化式

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1} = F_n \overline{F}_{n+1} \quad (12.1)$$

について考える. なおここでは平面の1次変換に関する知識を仮定する.

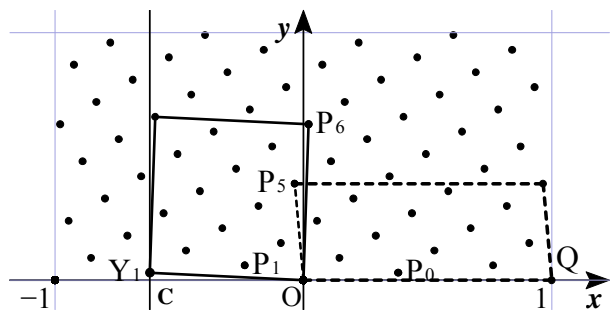


図 12.4 黄金格子

図 12.4 において点 $Q(1, 0)$ を $Y_1(-\tau, c) = Y_1(\omega - 1, c)$ に, P_0 を $P_1(2\omega - 1, 2c) = P_1(-\tau\omega, 2c)$ に移す 1 次変換を f とする. f を表す行列を X とおくと

$$X \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tau \\ c \end{pmatrix}, \quad X \begin{pmatrix} \omega \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tau\omega \\ 2c \end{pmatrix}$$

より

$$X \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tau & -\tau\omega \\ c & 2c \end{pmatrix}$$

となる. よって

$$X = \begin{pmatrix} -\tau & -\tau\omega \\ c & 2c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ 0 & c \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\tau & 0 \\ c & -\omega + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tau & 0 \\ c & \phi \end{pmatrix}$$

となる. f によって黄金格子の基底がまた基底に移っているの, f により格子点全体が格子点全体に移る.

X の第 1 行の形より, 元の格子点と移った格子点の x 座標は $-\tau$ 倍になっていることが分かる. よって主近似格子点 P_n は P_{n+1} に移る (x 座標が $(-\tau)^n \omega$ となる格子点は P_n だけである).

f によって OQ, OP_5 で張られる平行四辺形 (図の点線で囲まれた平行四辺形) は OY_1, OP_6 で張られる平行四辺形 (図の実線で囲まれた平行四辺形) に移る. Y_1 から x 軸に下ろした垂線の足を C とすると, その座標は $C(-\tau, 0)$ である.

領域 $D = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y\}$ の中の格子点で y 座標が P_5 の y 座標より小さい 12 個の格子点は, 点線で囲まれた平行四辺形の内部にある 12 個の格子点でもある. これら 12 個の格子点から下ろした垂線の足によって線分 OQ は長さの違う小区間に分けられそれに対応する文字列が

$$F_6 = babaababaabaa$$

である.

これら 12 個の格子点は 1 次変換 f によって左側の実線で囲まれた平行四辺形の内部の格子点に移される. この移った 12 個の格子点は, 領域

$$-\tau < x < 0, 0 < y$$

の格子点で y 座標が P_6 の y 座標より小さいような格子点全体でもある. これら 12 個の格子点の左右の並び方はもとの並び方の丁度逆になっている. 線分 CO はその上にある 12 個の格子点で小区間

である。したがって

$$\begin{aligned} t_n &= \frac{2}{\sqrt{5}} (\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}) \tau^{n+2} = \frac{2}{\sqrt{5}} (1 - (-1)^{n+2} \tau^{2(n+2)}) \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}} (1 - (-1)^{n+2} \omega^{n+2}) = \frac{2}{\sqrt{5}} (1 - (-\omega)^{n+2}) \end{aligned}$$

となる。 $n = 0, 1, 2$ をこの式に当てはめてみると

$$t_0 = \frac{2}{\sqrt{5}} (1 - \omega^2) = 3 - \sqrt{5} = 0.7638$$

$$t_1 = \frac{2}{\sqrt{5}} (1 + \omega^3) = 2(2\sqrt{5} - 4) = 0.9443$$

$$t_2 = \frac{2}{\sqrt{5}} (1 - \omega^4) = 21 - 9\sqrt{5} = 0.8754$$

である。その他の t_n ($n \geq 3$) は t_1, t_2 の間にあることが t_n の式の形

$$t_n = \frac{2}{\sqrt{5}} (1 - (-\omega)^{n+2})$$

からわかるので、すべての n に対して $t_n < 1$ が成立する。

$\{t_n, n \geq 1\}$ の最小値が t_2 であることも分かった。 \square

12.3 黄金格子の均一度

$\omega = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ が、 $0 < w < \frac{1}{2}$ の範囲にある無理数の中で最善となるような評価を n 次極小点を用いて考えることがこの節の目的である。

■ 評価法

黄金格子が最善となる評価法を探す。

(評価法 1) 1次以上の極小点の y 座標の最小値で評価する。即ち全分布関数 $V_{(w,+)}(c)$ の最小値で評価する。

(評価法 2) 2次以上の極小点の y 座標の最小値で評価する。

(評価法 1,2 ともに最小値の大きい方が均一度が高いと評価する。)

次の項で示すように、 ω の 1 次極小点の y 座標は 2 次極小点の y 座標よりも大きいので、 ω が評価法 2 で最善であれば評価法 1 でも最善である。

■ $\omega = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ について、その 1 次および 2 次極小点の座標を求める。 ω の n 次極小点の座標を $Q_n(s_n, t_n)$ とする。 t_1, t_2 は命題 12.3 の証明の中で計算している。 s_1, s_2 を計算すると

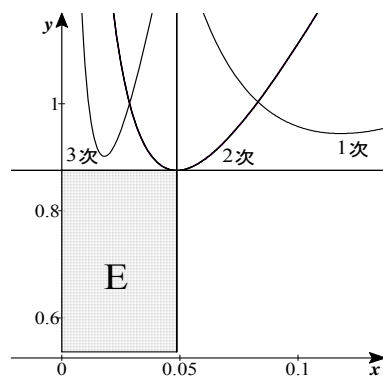
$$s_1 = \frac{t_1}{2q_1^2} = \frac{1}{2 \times 2^2} (4\sqrt{5} - 8) = \frac{\sqrt{5}}{2} - 1 = 0.1180$$

$$s_2 = \frac{t_2}{18} = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{6} = 0.04863$$

となる。このように Q_1 の x 座標、 y 座標はともに Q_2 のそれらよりも大きい。

以下この節では次の命題 12.4 を示すことを目標とする。

命題 12.4 ω の 2 次極小点を Q_2 とし、 OQ_2 を対角線とする長方形 (辺は x 軸、 y 軸に平行) の内部の領域を E とする。すなわち $E = L(OQ_2)$ とする。図 12.6 は ω の 2 次極小点と領域 E を表わしたものである。このとき ω と異なり、 $0 < w < \frac{1}{2}$ の範囲にある任意の無理数 w に対し、その m 次極小点 ($m \geq 2$) で E の中に位置するものが存在する。

図 12.6 ω の 2 次極小点と領域 E

この命題 12.4 が示されれば、評価法 2 で ω が最善であることが分かる。この議論のためには領域 E は

$$0 < x < \infty, 0 < y < t_2$$

として十分であるが、13章3節の内容との関係もありこのように x の上限を定めた。ここで無理数の集合 S と xy 平面の第1象限の点 P に関する条件 $M(P, S)$ を次のように定める。

$M(P, S)$: 集合 S に属する任意の無理数 w が与えられたとき、その m 次極小点 ($m \geq 2$) で長方形 $L(OP)$ の内部 (周は含まない) に位置するものが存在する。

これから与えられた無理数の集合 S に対し $M(P, S)$ を満たす点 P , で、その x 座標と y 座標がなるべく小さいものを見つけていく。

命題 12.5 「 $k_j \geq 2$ となる 4 以上の番号 j が存在する」ような連

分数で表わされる無理数の集合を S とする。 A を

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{36}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = (0.03928, 0.7071)$$

とおくと $M(A, S)$ が満たされる。

証明: S に属する無理数 w の n 次極小点を (s_n, t_n) とする。定理 8.13 より t_{j-2}, t_{j-1}, t_j のどれかは

$$\frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.7071$$

より小さい。それを t_m とするとき、 $m \geq 2$ より $q_m \geq 3$ となる。

$$s_m = \frac{t_m}{2q_m^2} \leq \frac{t_m}{18} < \frac{\sqrt{2}}{36} = 0.03928$$

となり $M(A, S)$ が満たされる。 \square

命題 12.6 「 $k_3 \geq 2$ かつ $j \geq 4$ ならば $k_j = 1$ 」となる連分数で表わされる無理数の集合を S とする。 B を

$$\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{18}, 3 - \sqrt{5} \right) = (0.04244, 0.7639)$$

とおくと $M(B, S)$ が満たされる。

証明 S に属する無理数 w の n 次極小点を (s_n, t_n) , 第3次全商を v_3 とする。

$$v_3 = [k_3, 1, 1, \dots] = k_3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}} = k_3 + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

である。したがって補題 11.4(2) より

$$t_2 = \frac{2}{v_3 + \frac{q_1}{q_2}} < \frac{2}{v_3} = \frac{2}{k_3 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{4}{2k_3 + \sqrt{5} - 1}$$

$k_3 \geq 2$ に注意すると

$$t_2 < \frac{4}{2k_3 + \sqrt{5} - 1} \leq \frac{4}{4 + \sqrt{5} - 1} = 3 - \sqrt{5} = 0.7639$$

である。また s_2 に関しては $q_2 \geq 3$ より

$$s_2 = \frac{t_2}{2q_2^2} < \frac{3 - \sqrt{5}}{18} = 0.04244$$

となり $M(B, S)$ が満たされる。□

命題 12.7 「 $k_2 \geq 2$ かつ $j \geq 3$ ならば $k_j = 1$ 」となる連分数で表わされる無理数の集合を S とする。 C を

$$\left(\frac{21 - 9\sqrt{5}}{98}, 21 - 9\sqrt{5} \right) = (0.0089, 0.8754)$$

とおくと $M(C, S)$ が満たされる。

証明 S に属する無理数 w の n 次極小点を (s_n, t_n) とする。

補題 11.4(1), (2) より

$$t_3 = \frac{2}{v_4 + \frac{q_2}{q_3}} = \frac{2}{v_4 + \frac{1}{[1, k_2, k_1]}} = \frac{2}{v_4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{k_2 + \frac{1}{k_1}}}}$$

となる。

$$k_2 + \frac{1}{k_1} > 2$$

より

$$1 + \frac{1}{k_2 + \frac{1}{k_1}} < 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

であり、従って

$$v_4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{k_2 + \frac{1}{k_1}}} > v_4 + \frac{2}{3}$$

よって

$$t_3 < \frac{2}{v_4 + \frac{2}{3}} = \frac{2}{\frac{\sqrt{5}+1}{2} + \frac{2}{3}} = 21 - 9\sqrt{5} = 0.8754$$

s_3 については $q_3 = k_1 k_2 + 1 + k_1 \geq 7$ に注意すると

$$s_3 = \frac{t_3}{2q_3^2} < \frac{21 - 9\sqrt{5}}{2 \times 7^2} = 0.0089$$

これで $M(C, S)$ が満たされることが示された。□

命題 12.8 「 $k_1 \geq 4$ かつ $j \geq 2$ ならば $k_j = 1$ 」となる連分数で表わされる無理数の集合を S とする。 D を

$$\left(\frac{5 - 2\sqrt{5}}{20}, \frac{8(5 - 2\sqrt{5})}{5} \right) = (0.0264, 0.8446)$$

とおくと $M(D, S)$ が満たされる。また連分数 $[0, 3, 1, 1, \dots]$ の 2 次極小点は D である。

証明 連分数 $[0, k_1, 1, 1, \dots]$ で表される無理数 w の2次極小点を (s_2, t_2) とする.

$$t_2 = \frac{2}{v_3 + \frac{q_1}{q_2}} = \frac{2}{\frac{\sqrt{5}+1}{2} + \frac{k_1}{k_1+1}} = \frac{2}{\frac{\sqrt{5}+1}{2} + \frac{1}{1 + \frac{1}{k_1}}}$$

ここで k_1 が増加すれば $1 + \frac{1}{k_1}$ は減少, $\frac{1}{1 + \frac{1}{k_1}}$ は増加, よって t_2

は減少する. また

$$s_2 = \frac{t_2}{2q_2^2} = \frac{t_2}{2(k_1+1)^2}$$

より s_2 も k_1 が増加すれば減少する.

ここで $k_1 = 3$ のときの2次極小点の座標を計算すると

$$(s_2, t_2) = \left(\frac{5-2\sqrt{5}}{20}, \frac{8(5-2\sqrt{5})}{5} \right) = (0.0264, 0.8446)$$

である. $k_1 > 3$ のときの2次極小点の x 座標, y 座標はともに $k_1 = 3$ のときのそれらより小さいので $M(D, S)$ が成立する. \square

命題 12.4 の証明: 図 12.7 は右から順に ω の1次, 2次, 3次の分布関数と直前の四つの命題に出てきた点 A, B, C, D を画いている. 4点 A, B, C, D の x 座標, y 座標はそれぞれ, ω の2次極小点

$$\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{6}, 21-9\sqrt{5} \right) (0.04863, 0.8754)$$

の x 座標, y 座標以下である. 従って命題 12.4 が成立する. (図の縦と横の線は ω の2次極小点を通るように引いている) \square

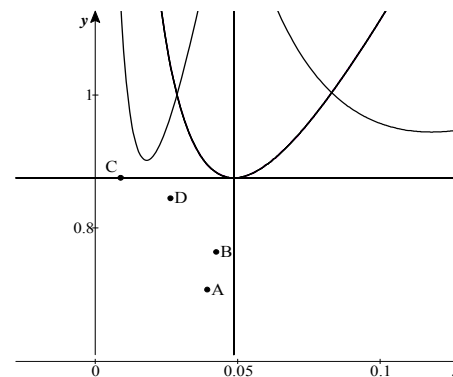


図 12.7 点 A, B, C, D の位置

第13章 四つの連分数

四つの連分数

$$[0, 2, 1, 1, \dots], [0, 3, 1, 1, \dots], [0, 4, 1, 1, \dots], [0, 2, 2, 1, 1, \dots]$$

を考える。前章で考えた、評価法1あるいは評価法2では、この四つがベスト4とはならない。このことは例13.10で示す。そこで新たな評価法を考える。なお本章では13章3節を除いて無理数 w の範囲は特に制限していない。

13.1 無理数の対等

定理13.4はよく知られているが、ここでは無理数で定まる格子を用いて定理を証明をする。

定義 13.1 二つの無理数 w_1, w_2 がある。

$$w_1 = \frac{aw_2 + b}{cw_2 + d} \text{ ただし } a, b, c, d \text{ は整数で } ad - bc = \pm 1$$

となる a, b, c, d が存在するとき w_1 と w_2 は対等(equivalent)であるといい、 $w_1 \equiv w_2$ と書く。

定理 13.2 無理数の間に定義された関係「対等 \equiv 」は同値関係である。即ち次の三つの法則が成立する。

- (1) 反射律 $w_1 \equiv w_1$
 (2) 対称律 $w_1 \equiv w_2 \Rightarrow w_2 \equiv w_1$
 (3) 推移律 $w_1 \equiv w_2, w_2 \equiv w_3 \Rightarrow w_1 \equiv w_3$

証明：無理数 w と $ad - bc = \pm 1$ なる整数 a, b, c, d を用いて表される無理数 $\frac{aw + b}{cw + d}$ を行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を用いて $A\langle w \rangle$ と書くことにする。 $A\langle w \rangle$ と $(-A)\langle w \rangle$ は一致する。 A, B が整数を成分とする行列でその行列式が ± 1 ならば $-A, A^{-1}, AB$ もまた整数を成分とし、その行列式は ± 1 である。このとき

$$w_1 = A\langle w_2 \rangle \Rightarrow w_2 = A^{-1}\langle w_1 \rangle$$

$$w_1 = A\langle w_2 \rangle, w_2 = B\langle w_3 \rangle \Rightarrow w_1 = (AB)\langle w_3 \rangle$$

が成立する (計算は容易であり省略する)。よって対称律、推移律が成立する。反射律が成立することは明らかである。 \square

補題 13.3 無理数 w に対して

$$w \equiv w + n \quad (n \text{ は整数}), \quad w \equiv -w, \quad w \equiv \frac{1}{w}$$

が成立することは明らかであるが、逆に $w_1 \equiv w_2$ のとき、上の三つの操作、即ち

- (1) 整数を加える。
 (2) 符号を変える。
 (3) 逆数を取る。

を繰り返し行うことにより w_1 から w_2 に変形できる。

証明： $w_1 = A\langle w_2 \rangle$ に上記三つの操作を行うことは行列 A に次の操

作を行うことに他ならない。

- (1) A の第2行を n 倍 (整数倍) して第1行に加える。
 (2) A の第1行または第2行に -1 をかける。
 (3) A の第1行と第2行を入れ換える。

上の操作 (1) と (3) を組み合わせれば次の操作

- (4) A の第1行を n 倍 (整数倍) して第2行に加える。

も行うことが出来る。 A は成分が整数で行列式が ± 1 の行列であるが、これら四つの操作を行ってもやはり成分は整数で行列式は ± 1 であることを注意しておく。これからこの四つの操作を用いて行列 A が単位行列 E に変形できることを示す。

Step 1. [A の第1列の成分がともに0以上となるように変形する。]

1列の成分が負の行に -1 をかければ、この変形が出来る。

Step 2. [A の第1列の成分がともに正の場合にはそれらの成分がともに0以上となり、さらにその合計が減少するように変形する。]

第1列のふたつの成分のうち、大きくない方が属する行を -1 倍して他の行に加えればよい。

Step 3. [A の $(1, 1)$ 成分が1, $(2, 1)$ 成分が0と変形する。]

Step 2 の操作を続けていけば、いつかは第1列のどちらかの成分は0となる。このとき他方の成分は1である。(これは行列式が ± 1 で

あることから分かる.) 必要なら行の入れ換えを行って $(1, 1)$ 成分を 1 とすればよい.

Step 4. [単位行列に変形する]

Step 3 まで変形をしたとき, その行列式は ± 1 なので $(2, 2)$ 成分は ± 1 となる. $(2, 2)$ 成分が -1 のときは第 2 行に -1 をかけることにより 1 とできる. このとき $(1, 2)$ 成分が n ならば 2 行を $-n$ 倍して 1 行に加えればよい.

以上で A は単位行列に変形できることが示された. よって w_1 は w_2 に変形できる. \square

定理 13.4 二つの無理数 w_1, w_2 について, 次は同値である.

- (1) $w_1 \equiv w_2$
- (2) w_1 の m 次全商と w_2 の n 次全商が一致するような m, n が存在する. (これは w_1 と w_2 の連分数において, それぞれ m 次以降の項と n 次以降の項が一致することを意味する)

証明: (2) で定まる無理数の間の関係を $w_1 \cong w_2$ と書く. この関係が同値関係であることは明らかである. また w_1 の m 次全商 v_m と w_1 について $w_1 \equiv v_m$ となることは系 6.11 よりわかる. よって $w_1 \cong w_2$ ならば $w_1 \equiv w_2$ が成立する. 逆を示す. すなわち $w_1 \equiv w_2$ ならば $w_1 \cong w_2$ を示す. 補題 13.3 より無理数 w に対して

- (a) $w \cong w + n$ ただし n は整数
- (b) $w \cong -w$
- (c) $w \cong \frac{1}{w}$

を示せばよいことが分かる.

(a) の証明: w と $w + n$ の 1 次以上の部分商は一致する. よって $w \cong w + n$ となる.

(b) の証明: w と $-w$ で定まる格子 $\Lambda(w, c)$ と $\Lambda(-w, c)$ は y 軸に関して対称である. 命題 8.3 と命題 8.5 より分かるように無理数の n 次部分商 k_n は, その無理数で定まる格子の $(n-2)$ 次と $(n-1)$ 次の主近似格子点 P_{n-2}, P_{n-1} と y 軸との距離 x_n と x_{n+1} で定まる. 即ち $k_n = [x_n/x_{n+1}]$ である. よって $w \cong -w$ となる.

(格子点は y 軸に関して対称となっているが, 主近似格子点に関してはすべてが y 軸に関して対称となっているわけではない. 対称となっていない主近似格子点はその y 座標が c の場合である. $\Lambda(w, c)$ の 0 次主近似格子点 $P_0(w - p_0, c)$ の x 座標 $w - p_0$ が $1/2$ より大きいときは 1 次主近似格子点 $P_1(w - p_0 - 1, c)$ の y 座標も c であり, $1/2$ より小さいときは近似格子点 $(w - p_0 - 1, c)$ は主近似格子点ではない. 従って w と $-w$ の y 軸に関して対称な主近似格子点はその次数がひとつずれている. すなわち w と $-w$ の一致する部分商の列はその次数がひとつずれている.)

(c) の証明: (b) より w が正の場合を示せばよい. このとき w が 1 より小さいければ w の 1 次以上の部分商の列が $1/w$ の 0 次以上の部分商の列となる. 逆に $1/w$ が 1 より小さいければ $1/w$ の 1 次以上の部分商の列が w の 0 次以上の部分商の列となる. よって (c) が成立する. \square

13.2 黄金比と対等な無理数

この節では, 次の定理が成り立つことを示す.

定理 13.5 w を黄金比 $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1, 1, 1, \dots]$ と対等な無理数とし, n_0 を $n \geq n_0$ のとき $k_n = 1$ で $n_0 \geq 2$ となるような番号とする. (ここに k_n は w の連分数の n 次部分商である.) 次が成立する.

(1) n 次極小点の y 座標は n が大きくなるとき $\frac{2}{\sqrt{5}}$ に近づく. すなわち数列

$$\left\{ 2q_n^2 \left| w - \frac{p_n}{q_n} \right| - \frac{2}{\sqrt{5}} \right\} \quad (13.1)$$

は 0 に収束する.

(2) $n \geq n_0 - 1$ のとき, 数列 (13.1) は交差数列 (隣り合う項の符号が異なる数列) である.

(3) $n \geq n_0 - 1$ のとき, 数列 (13.1) を奇数番号と偶数番号からなる二つの数列に分ける. このとき二つの数列はともに狭義の単調数列 (ひとつが単調増加ならもうひとつは単調減少) である.

定理 13.5 の証明の前に, この定理の系を書いておく.

系 13.6 四つの連分数

$$[0, 2, 1, 1, \dots], [0, 3, 1, 1, \dots], [0, 4, 1, 1, \dots], [0, 2, 2, 1, 1, \dots]$$

で表される四つの無理数それぞれにおいて, n 次極小点 ($n \geq 2$) の y 座標の最小値は $n = 2, 3$ のどちらかで取る. (よって n の範囲を $n \geq 1$ としたときは, $n = 1, 2, 3$ のどれかで最小となる.)

証明: 13.1 から 13.4 までの四つの図は四つの無理数の 1 次, 2 次, 3 次分布関数のグラフである. 四つの図とも同じ位置に x 軸, y 軸に平行な直線を引いている. これらは連分数 $[0, 2, 1, 1, \dots]$ で表される無理数 w の 2 次極小点を通っている.

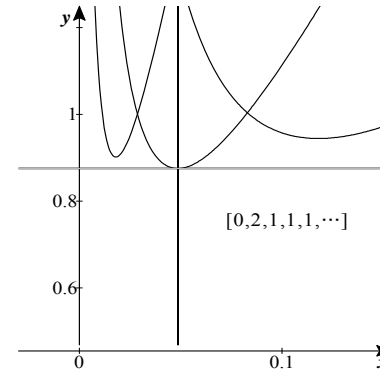


図 13.1 $[0, 2, 1, 1, \dots]$

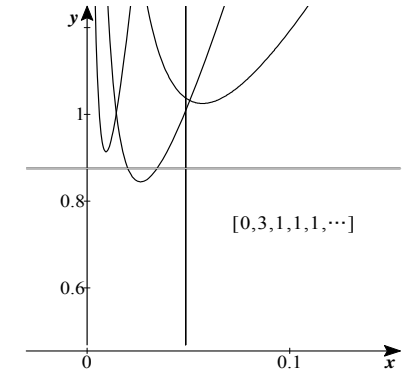


図 13.2 $[0, 3, 1, 1, \dots]$

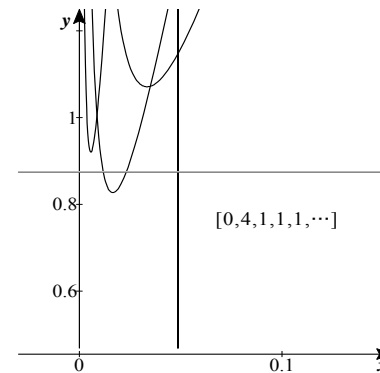


図 13.3 $[0, 4, 1, 1, \dots]$

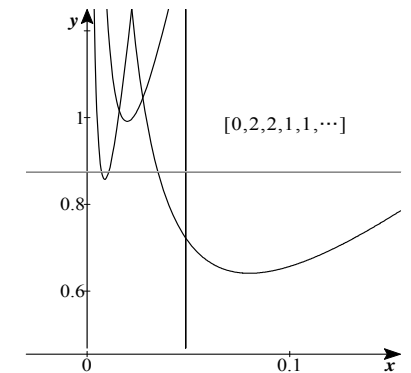


図 13.4 $[0, 2, 2, 1, 1, \dots]$

定理 13.5 より連分数 $[0, 2, 1, 1, \dots]$, $[0, 3, 1, 1, \dots]$, $[0, 4, 1, 1, \dots]$ で表わされる無理数については 4 次以上の極小点の y 座標は 2 次極小点と 3 次極小点の y 座標の間にある. 従って 2 次以上の極小点の中で y 座標が最も小さいものは 2 次極小点である. また $[0, 2, 2, 1, 1, \dots]$ で表わされる無理数についても 4 次以上の極小点の y 座標は 2 次極小点と 3 次極小点の y 座標の間にある. 従って 2 次以上の極小点の中で y 座標が最も小さいものは 3 次極小点である. よって系の主張

が成立する. \square

系 13.7

「無理数 w と正数 c に対し, $q^2 \left| w - \frac{p}{q} \right| < c$ を満たす既約分数が無
限に存在する」

という命題を命題 P と呼ぶ. 次の (1), (2), (3) が成立する. (1) と (3)
については定理 8.13(2) より, (2) については系 8.12(a), 定理 13.5
より成立することがわかる.

- (1) 任意の無理数 w と $c = \frac{1}{\sqrt{5}}$ に対して命題 P が成立する.
 (2) 黄金比と対等な無理数 w と $c < \frac{1}{\sqrt{5}}$ に対して命題 P は成立しな
い.
 (3) 黄金比と対等でない無理数 w と $c = \frac{1}{\sqrt{8}}$ に対して命題 P が成立
する.

定理 13.5 の証明のために補題 13.8 と命題 13.9 を準備する.

補題 13.8 数列 $\{a_n, n \geq 1\}$ は初項と第 2 項が正 (したがってす
べての項が正) の一般フィボナッチ数列とする. このとき, 次が成
立する.

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$
 (2) 数列 $\{b_n, n \geq 2\}$, $\left(b_n = \frac{a_{n-1}}{a_n} - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right)$ は交代数列であ
る.
 (3) 数列 $\{c_n, n \geq 2\}$, $\left(c_n = \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right| \right)$ は狭義の単調減
少数列である. (すなわち $c_2 > c_3 > \dots$ となる)

(1) の証明: 方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の 2 つの解を

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

とおく. 命題 7.4 より,

$$a_n = x\alpha^{n-1} + y\beta^{n-1}, n \geq 1$$

と表わすことができる. a_1, a_2 は正と仮定したので, x は 0 ではな
い. ($x = 0$ とすると $a_1 = y, a_2 = y\beta$ となるがこのふたつは符号が
異なる.) このとき

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{x\alpha^{n-2} + y\beta^{n-2}}{x\alpha^{n-1} + y\beta^{n-1}} = \frac{x + y \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{n-2}}{x\alpha + y\beta \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{n-2}}, (n \geq 2)$$

となる. $\left| \frac{\beta}{\alpha} \right| < 1$ なので

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{x}{x\alpha} = \frac{1}{\alpha} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

となる.

(2) の証明: b_2 と b_3 の符号が異なることを示せば十分である.

$b_2 < 0$ すなわち $\frac{a_1}{a_2} < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ と仮定する. $b_3 > 0$ すなわち

$\frac{a_2}{a_3} > \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ を示す. いま $d = \frac{a_1}{a_2}$ とおくと

$$\frac{a_2}{a_3} = \frac{a_2}{a_1 + a_2} = \frac{1}{\frac{a_1}{a_2} + 1} = \frac{1}{d + 1}$$

である.

$$d = \frac{a_1}{a_2} < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ より } d + 1 < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

となる. 逆数をとると

$$\frac{a_2}{a_3} = \frac{1}{d+1} > \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

となり主張 (2) が成立する. $b_2 > 0$ の場合も同じように示される.

(3) の証明: $c_2 > c_3$ を示せば十分である. $b_2 < 0$ すなわち

$$\frac{a_1}{a_2} = d < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

と仮定する. (2) より $b_3 > 0$ なので,

$$\begin{aligned} c_3 - c_2 &= b_3 - (-b_2) = b_3 + b_2 \\ &= \frac{1}{d+1} - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + d - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ &= d + \frac{1}{d+1} + 1 - \sqrt{5} \end{aligned} \quad (13.2)$$

となる. 式 (13.2) で d を x にした式を $f(x)$ とおく. すなわち

$$f(x) = x + \frac{1}{x+1} + 1 - \sqrt{5}$$

とおく. $f(x)$ の導関数を計算すると

$$f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

である. $x > 0$ のとき $f'(x) > 0$ よりこの範囲で $f(x)$ は増加してい

る. $f(x)$ に $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ を代入すると 0 になるので,

$$0 < d < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

より $c_3 - c_2 = f(d) < 0$ となることがわかる. よって $c_2 > c_3$ が示された. $b_2 > 0$ の場合も同じように示される. \square

命題 13.9 w を, 黄金比 $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = [1, 1, 1, \dots]$ と対等な無

理数とし, n_0 を $n \geq n_0$ ならば $k_n = 1$ で $n_0 \geq 2$ となる番号とする. このとき次が成立する. ただし k_n は w の連分数の n 次部分商, $\frac{p_n}{q_n}$ は w の n 次近似既約分数である.

(1) 等式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_{n-1}}{q_n} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

が成立する. また $n \geq n_0 - 1$ のとき数列

$$\left\{ \frac{q_{n-1}}{q_n} - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right\}$$

は交代数列である. さらにこの数列の絶対値をとった数列は狭義の単調減少数列である.

(2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n^2 \left| w - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

が成立する.

(1) の証明:

数列 $\{q_n\}$ は $n_0 - 2$ 項を初項と考えると一般フィボナッチ数列である. よって補題 13.8 を適用すればよい.

(2) の証明:

v_{n+1} を w の第 $n + 1$ 次全商とする. 補題 11.4 より

$$q_n^2 \left| w - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{v_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n}}$$

である. ここで w は黄金比 ϕ と対等な無理数なので, n を十分大きくしてやれば, $v_{n+1} = [1, 1, 1, \dots] = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ である. よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n^2 \left| w - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{\frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

となるので, 主張が証明された. \square

ここで定理 13.5 の証明をする. 定理 13.5 の (1) については命題 13.9, (2) で出てきた等式の両辺を 2 倍すればよい.

定理 13.5(2) の証明: $n \geq n_0 - 1$ のとき

$$\begin{aligned} q_n^2 \left| w - \frac{p_n}{q_n} \right| - \frac{1}{\sqrt{5}} &= \frac{1}{v_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{1}{\frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{q_{n-1}}{q_n}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned} \quad (13.3)$$

である. 命題 13.9 より, 数列

$$\left\{ \frac{q_{n-1}}{q_n} - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right\} \quad (13.4)$$

は交代数列である. このとき

$$\begin{aligned} \frac{q_{n-1}}{q_n} > \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} &\Leftrightarrow \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{q_{n-1}}{q_n} > \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{q_{n-1}}{q_n}} < \frac{1}{\sqrt{5}} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{q_{n-1}}{q_n}} - \frac{1}{\sqrt{5}} < 0 \end{aligned}$$

より (13.3) も交代数列となる. よって (13.1) も交代数列となり (2) が証明された. \square

定理 13.5(3) の証明: 命題 13.9 より, 数列 (13.4) に絶対値をつけた次の数列 (13.5)

$$\left\{ \left| \frac{q_{n-1}}{q_n} - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right| \right\} \quad (13.5)$$

は狭義の単調減少数列である. よって数列 (13.4) は $n \geq n_0 - 1$ のとき, 奇数番号と偶数番号に分けると, それらは狭義の単調数列となり, 一方は増加, もう一方は減少数列である. よって例えば減少数列となる方を考えてみる.

$$\frac{q_{m-1}}{q_m} - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} > \frac{q_{m+1}}{q_{m+2}} - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} > 0$$

とすると, 左辺, 中辺, 右辺にそれぞれ $\sqrt{5}$ を加えて

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{q_{m-1}}{q_m} > \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{q_{m+1}}{q_{m+2}} > \sqrt{5}$$

さらに逆数をとると

$$\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{q_{m-1}}{q_m}} < \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{q_{m+1}}{q_{m+2}}} < \frac{1}{\sqrt{5}}$$

となる。よって左辺、中辺、右辺からそれぞれ $1/\sqrt{5}$ を引いて

$$q_m^2 \left| w - \frac{p_m}{q_m} \right| - \frac{1}{\sqrt{5}} < q_{m+2}^2 \left| w - \frac{p_{m+2}}{q_{m+2}} \right| - \frac{1}{\sqrt{5}} < 0$$

となり、こちらは単調増加となる。同様にもう一方の数列が単調減少となることが証明できる。よって (3) が示された。□

13.3 新たな評価法

この節では無理数 w は $0 < w < \frac{1}{2}$ の範囲にあると仮定する。12.3 で黄金格子が最善となる評価法 1, 2 を考えた。それは次のようなものであった。

評価法 1 : 1 次以上の極小点の y 座標の最小値で評価する。

評価法 2 : 2 次以上の極小点の y 座標の最小値で評価する。

(評価法 1, 2 とともに最小値の大きい方が均一度が高いと評価する。)

残念ながらどちらの評価法でも四つの連分数

$$[0, 2, 1, 1, \dots], [0, 3, 1, 1, \dots], [0, 4, 1, 1, \dots], [0, 2, 2, 1, 1, \dots]$$

で表される無理数がベスト 4 とはならない。

例 13.10 ベスト 4 とはならないことを示す例

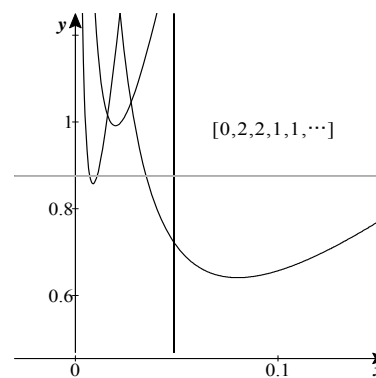


図 13.5 $[0, 2, 2, 1, 1, \dots]$

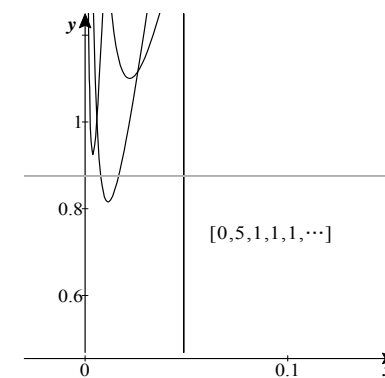


図 13.6 $[0, 5, 1, 1, 1, \dots]$

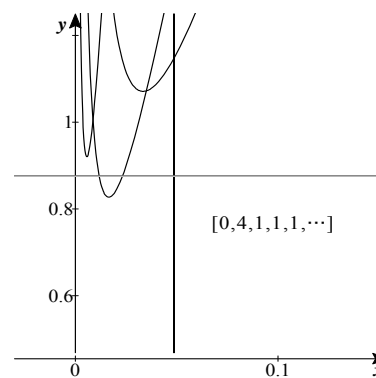


図 13.7 $[0, 4, 1, 1, 1, \dots]$

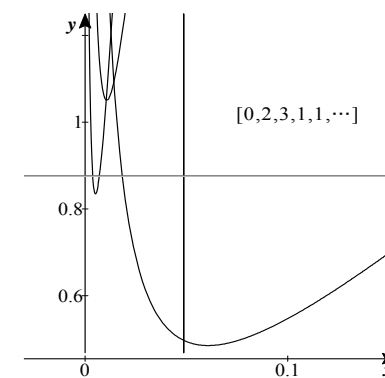


図 13.8 $[0, 2, 3, 1, 1, \dots]$

図 13.5 から図 13.8 はベスト 4 とはならないことを示す図である。評価法 1 では $[0, 5, 1, 1, 1, \dots]$ が $[0, 2, 2, 1, 1, \dots]$ よりも均一度が高いと判定される。図 13.5, 図 13.6 参照のこと。評価法 2 では $[0, 2, 3, 1, 1, \dots]$ が $[0, 4, 1, 1, 1, \dots]$ より均一度が高いと判定される。図 13.7, 図 13.8 参照のこと。実際連分数 $[0, 4, 1, 1, 1, \dots]$ の 2 次極小点と連分数 $[0, 2, 3, 1, 1, \dots]$ の 3 次極小点の y 座標を計

算するとそれぞれ

$$\frac{5(13 - 5\sqrt{5})}{11} = 0.827, \quad \frac{9(23 - 9\sqrt{5})}{31} = 0.835$$

となり, $[0, 4, 1, 1, \dots]$ の2次極小点の y 座標のほうが小さい.

■新たな評価法を考える

評価法3: ある正数 d を考え $0 < x \leq d$ における全分布関数

$V_{(w,+)}(x)$ の最小値で評価する. (最小値は n 次極小点あるいは $x = d$ で取る)

四つの格子が評価法3でベスト4となるような d が存在するかどうかを調べるためには, 12章3節「黄金格子の均一度」よりも詳しい計算が必要となる. またかなりのページ数を必要とし内容的にもどれだけ意味があるか不明, という理由で計算の部分は省略することとした. 結果だけを言えば四つの格子がベスト4となる d が存在することが分かった.

13.4 近似分数の生成アルゴリズム

本節では無理数 w の範囲に制限はしない. 無理数 w で定まる格子 $\Lambda(w, c)$ の近似格子点を生成していくアルゴリズムをヒントとして, w の近似既約分数を生成するアルゴリズムが考えられる.

■ファレイ対

これまでのように既約分数の分母は正とする. このとき任意の有理数は一意的に既約分数の形に表すことができる. ただし整数の分母は1とする.

二つの有理数 r_1, r_2 ($r_2 < r_1$) がある. r_1, r_2 を既約分数の形に表

しそれを

$$r_1 = \frac{a}{b}, r_2 = \frac{c}{d}$$

とする. $ad - bc = 1$ となるとき, 有理数の順序対 (r_2, r_1) をファレイ対 (Farey pair) と言うことにする. ただしこれは一般に使われている用語ではない. またファレイ対 (r_2, r_1) と無理数 w があり $r_2 < w < r_1$ となるとき, (r_2, r_1) を w を挟むファレイ対という.

ファレイ対 (r_2, r_1) よりつくられる有理数 $M(r_2, r_1)$ を次のよう定める. すなわち

$$M(r_2, r_1) = \frac{a+c}{b+d}$$

と定め, これをファレイ対 (r_2, r_1) の中間数 (mediant) という.

$a(b+d) - b(a+c) = 1$ より $\frac{a+c}{b+d}$ もまた既約分数である.

$$r_2 < M(r_2, r_1) < r_1$$

であり,

$$(r_2, M(r_2, r_1)), (M(r_2, r_1), r_1)$$

はともにファレイ対となる.

■無理数の近似分数列を作る.

無理数 w に対して

$$\alpha_0 = [w], \alpha_1 = [w] - 1$$

とおく. (α_1, α_0) は w を挟むファレイ対である. 次に

$$\alpha_2 = M(\alpha_1, \alpha_0)$$

とおく. ファレイ対 (α_1, α_0) の α_0 または α_1 を α_2 で置き換えて新たな w を挟むファレイ対を作る. この新たなファレイ対の中間数を

α_3 とおく. この α_3 を最後に作ったファレイ対の両端のどちらかに置きかえて, さらに区間の幅の狭い w を挟むファレイ対を作る.

以下同様にして有理数の列

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$$

ができるが, これが w の近似分数全体となる. 実際, 第8章定義 8.1 で $\Lambda(w, c)$ の近似格子点の列

$$Y_0, Y_1, Y_2, \dots$$

を定義したが, この Y_i に対応する近似分数が α_i である.

なお α_i は右端のファレイ対の数と入れ換え, α_{i+1} は左端の数と入れ換える, というように入れかえる数の左右が変わるとき, α_i は主近似分数である. したがって順に作られていく w を挟むファレイ対の右端あるいは左端の少なくとも一方は主近似分数である. 即ち順に作られていくファレイ対の両端を既約分数で表したとき, 分母が小さい方は w の主近似分数である. 最初に考えたファレイ対 (α_1, α_0) の分母は共に 1 で, 小さいほうは無いがこのときは $\alpha = [w]$ が 0 次の主近似分数である.

■無理数を挟む任意のファレイ対

無理数 w を挟むファレイ対 $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ があつたとする. $d > b$ のとき

$$\frac{c-a}{d-b} < \frac{c}{d} < \frac{a}{b}$$

であるが, $(\frac{c-a}{d-b}, \frac{a}{b})$ はまた w を挟むファレイ対である. 同様に $d < b$ のときは $(\frac{c}{d}, \frac{a-c}{b-d})$ が w を挟むファレイ対である. このように w を挟むファレイ対から始めて, その区間の幅を拡げて新たなファレイ対を作っていくことができる. これは前項で考えたファレ

イ対の区間の幅を狭めていくアルゴリズムの丁度逆となっている. この区間の幅を拡げる操作を行っていくと, いつかはファレイ対の両端の既約分数の分母がともに 1 となり, それは $([w]-1, [w])$ というファレイ対になる. よって無理数 w を挟む任意のファレイ対 $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ は, 前項で考えた近似既約分数を作っていくアルゴリズムの途中に出てくるファレイ対である. したがって $\frac{c}{d}, \frac{a}{b}$ は w の近似既約分数であり, 少なくとも一方は (分母の小さい方は) w の主近似既約分数である.

関連図書

- [1] 中村滋著 フィボナッチ数の小宇宙/ フィボナッチ数, リュカ数, 黄金分割 (改訂版) 日本評論社 2008
- [2] 中村滋著 数学の花束 岩波書店 2008
- [3] 原 襄著 植物形態学 朝倉書店 1994
- [4] 前原 潤, 桑田孝泰著 数学のかんどころ3 知っておきたい幾何の定理 共立出版 2011
- [5] キース・ボール著 佐藤かおり・佐藤宏樹訳 フィボナッチのウサギ 青土社 2006
- [6] 高木貞治著 初等整数論講義 (第2版 35刷) 共立出版 2004
- [7] Paul Erdős, János Surányi, Topics in the Theory of Numbers 2nd edition, Springer, 2000
- [8] 訳・解説 中村幸四郎, 寺阪秀孝, 伊東俊太郎, 池田美恵 ユークリッド原論 (追補版) 共立出版 2011
- [9] 熊沢正夫著 植物器官学 裳華房 1979
- [10] B. グッドウィン著 中村運訳 DNA だけで生命は解けない シュプリンガー・フェアラーク東京 1998

索引

equivalent, 39

Farey pair, 55

mediant, 55

n 次極小点, 13

n 次分布関数, 4

一般フィボナッチ数列, 23

黄金格子, 22

黄金比, 21

基底, 2

狭義, 46

格子, 1

交代数列, 46

最良近似, 16

主近似既約分数, 13

主近似格子点, 1, 22

推移律, 40

正三角形, 2

正三角形格子, 7

全商, 13

全分布関数, i, 5

相加平均, 13

相乗平均, 13

対称律, 40

単調減少数列, 46

中間数, 55

導関数, 48

等比数列, 23

反射律, 40

反例, 9

評価法, 30

ファレイ対, 55

分布関数, 4

分布係数, 1

四つの連分数, 39