

---

# 序 文

本書は、レーゲンスブルク大学 (University of Regensburg) において、代数の基礎的な知識をもつ学生に対して何回かにわたって行った、可換環論と平面代数曲線についての講義を少し拡張し詳述したものである。ドイツ語の講義ノートを英語に翻訳し、また本書の多くの曲線の図を作成してくれた Richard Belshoff に感謝する。

前著である『可換環と代数幾何入門』という私の本でそうしたように、可換代数を紹介する最良の方法は、可換代数を用いて代数幾何学におけるいくつかの応用を示すことにある、という考え方に従っている。このことは、以前に私が書いた本におけるよりも実質的により初等的な水準にあるということに現れている。なぜならば、たとえば、平面曲線の抽象的なリーマン面は「実際」高次元空間の中の滑らかな曲線である、というようなときおり証明なしに述べる注意以外に、平面幾何を決して忘れたわけではないからである。曲線論の他書の説明に比べて、本書では代数的な見方が前面に強く出ている。このことは、たとえば Brieskorn-Knörrer [BK] の『平面代数曲線論』とは完全に異なっている。彼等の本では 幾何-位相-解析的な側面が特に強調されており、またその話題についての歴史がさらに強調されている。これらの事柄がそこで詳細に、そしてたくさんの美しい絵によって説明されているのであるから、本書で位相的であつ解析的な関係に立ち入らなければならないという義務感から解放されるのを感じる。私が行った講義においては、学生に Brieskorn-Knörrer [BK] の関連している適当な部分を読むように推薦した。G. Fischer [F] による本もこの目的に役立つであろう。

我々は代数的閉体  $K$  上の代数曲線を考察するであろう。  $\mathbb{C}$  上の曲線論の詳

細と任意の代数的閉体上の曲線論の詳細との間に密接な対応があるということは、少しも先験的に明らかなことではなく、そのことはむしろ驚異として見るべきである。標数が素数である体上の曲線と、標数0の体上の曲線の間の類似性はわりあいと早くに終焉を迎える。過去数十年の間に、素数標数の代数曲線は符号理論や暗号理論への入り口となり、ゆえにまた応用数学への入り口となった。

本書では、私が知っている平面代数曲線論入門と異なるいくつかの方法を採用している。フィルター代数や、それに付随した次数環、そしてリース環が平面代数曲線の交叉理論についての基本的な事実を導くためにかなりの程度まで用いられるであろう。それはこのテーマについての多くの古典的定理に対して現代的な証明となるであろう。我々が適用した手法は今日では計算機代数の標準的な道具でもある。

アフィン平面における代数的留数理論の説明もまた与えられ、交叉理論へのその応用も考察される。二つの平面曲線の交点について、ここで証明された定理の多くは比較的少ない変更で  $n$  次元空間の  $n$  個の超曲面の交点、言い換えると、 $n$  個の未知数の  $n$  個の代数方程式の解の集合に対して成り立つ。

リーマン・ロッホの定理とその応用の論じ方は1936年に F. K. Schmidt により与えられた証明のアイデアにもとづいている。彼の証明の方法はここで与えた説明には特に適しており、この説明はフィルターと付随した次数環の術語で定式化されている。

本書は平面曲線の特異点の分類への入門を含んでいる。この問題については近年非常にたくさんの文献が出版され、また引用されている。この講義はあるところまでで終わりにしなければならないので、特異点の解消は扱われていない。この問題については Brieskorn-Knörrer かまたは Fulton [Fu] を参照していただきたい。それにもかかわらず、私は読者がその問題に対する考え方と、高次元代数幾何学の方法のいくつかを理解することを希望している。

本書で用いられており、かつ通常の代数のコースを越えている代数的事実は付録 A から付録 L に一緒に集めて編成されている。本書の三分の一を構成しているこの付録は本論で必要なときに引用される。第 II 部の最初の「代数的な基礎」におけるキーワードのリストにより、代数のどんな部分が読者にとってよく知られている事柄であると私が考えているか明確になるであろう。本書はこれらの基礎にもとづいて、完全でかつ詳細な証明を与えるよう常に努力

した。

私の以前の学生である Markus Nübler, Lutz Pinkofsky, Ulrich Probst, Wolfgang Rauscher, Alfons Schamberger たちは、本書を部分的に一般化し、学位取得論文を書いた。彼らは本書の明確さと読みやすさのために非常に大きな貢献をしてくれた。彼らと、私の講義に出席した学生たちに対して、私は彼らの批判的な意見に感謝の意を表したい。私の同僚の Rolf Waldi は、彼のセミナーにおいてドイツ語のこの講義ノートを用いてくれた。また彼には、いくつかの改良を提案してくれたことに対して感謝したい。

Regensburg

December 2004

Ernst Kunz