# 序

ホモロジー代数学がその体系化の先達であり中心であったH. Cartan, S. Eilenbergによる一書 [$7_0$]（巻末文献表参照）として出版されたのは昨年である．しかし同書が書かれたのは数年前であったので，その後にいくつかの進展，とくに内容的な意味におけるそれがなされている．また同書は主として一般的体系を重視して書かれていることはその序文が示すとおりである．そこでホモロジー代数学を同書の大綱に沿いながらも，その後の進展のいくらかを盛り，かつ紙数のゆるす範囲でなるべく内容的に紹介したならば，単に邦文による参考書をという以上の意味をもつであろうと思ったのが，秋月教授のおすすめのまま敢えて本稿の筆をとった動機である．従ってそれらの点をここに述べることは，すでに [$7_0$] を読まれた方も少なくないであろうかと思われる読者に対する著者の務めであろう．すなわち，ほぼ章を追うならば，既知の遺伝環の場合を拡張して環の大局次元をイデアルの次元の問題に還元したAuslander [3] の補題は非常に便利であり，(6.11)，(12.3) に述べてある．Syzygy論は，Eilenberg [12] が永尾–中山 [33]，Eilenberg–中山 [16′] におけるベキ零根基の半準素環の射影加群の構造および極小準同型の考えを用いて極小分解を考察し，非常に一般の場合に展開した理論を §14 に紹介して，その根幹とした．またSerre [41] の正則局所環の特徴づけなどを §15 に紹介した．Syzygy論はEuler–Poincaré指標とHilbert特性函数の関係から重複度論にも応用されるが，それについてはSamuel，永田，Serreの研究，とくに [42] を見られたい．(§ 15 に関連し追加文献 Tate [50] 参照)

テンソル積の次元論についてはEilenberg–Rosenberg–Zelinsky [17] により精密な研究がされたが，頁数の関係からそのごく初歩の部分をAuslander [4] の一結果と共に述べた (§16)．それでも [$7_0$] よりは相当前進しており，応用として多項式環や行列環につき述べたことも同書におけるより精密化されていることは個々の定理について見られたい．ただし既述のように中間的な結

果しか述べられなかったので，詳しくは [17] や原田 [18 と近刊] を見られたい．これらのことは多元環のテンソル積のコホモロジー次元やその応用についても同様である． Rosenberg-Zelinsky [40] は分離多元環の特徴づけに援用し，無限拡大体についての結果は残念ながら省略した．体の上の有限階多元環のコホモロジー次元の問題は池田-永尾-中山 [26] における構造論的決定で解決されたが，それを Eilenberg [11] の方法によって述べた（§19）．

群のホモロジーについて， Hochschild-Serre の完全基本系列は服部 [19] の方法で述べた（§22）（スペクトル列の方法にも9章で触れた）．有限群のホモロジーについては， 本講座の河田敬義教授の「代数的整数論」（[28]）に詳述されてあるので，本稿ではごくあっさりと一般論との関連を述べるにとどめた． Herbrand の補題や Tate [46] の定理もそこにゆずり，ホモロジー群の消える加群についてもテンソル積や構造（中山 [36]， [38]）は省略し， 単に連続二次元で云々の定理（の精密形）を0次元における基本完全系列(の類似)を援用して導くこと（[38]）についてだけ言及した（6章，問）．周期的なホモロジー群をもつ有限群の決定 （Artin-Tate） も [$7_0$] にゆずることにして言及しただけなので，ここにそうした有限群の具体的の決定は鈴木 [43] によって与えられたことを付記しておこう．

体系的にはさかのぼるが，米田 [47] の $n$ 重拡大は §27 に述べた，他方，正田教授の提案の自己移入性の条件による準フロベニウス環の池田 [25] の特徴づけおよびその Eilenberg-中山 [16] における精密化（§12），プリューファー環の服部 [20] の Tor による特徴づけ（§13）はいずれも言及するにとどまったこと，Eilenberg-池田-Jans-永尾-中山 [13, 15, 16′, 27] における剰余環の大局次元やコホモロジー次元，群のコホモロジーにおける Lyndon [31]，淡中 [45] 等の研究を省略したこと，すべて残念だがやむを得なかった．さらに一般的のこととして， Hochschild [22] の相対ホモロジーも割愛した． 相対的立場によって一層明瞭になる事がらも少なくないのであるが，全般的にその立場をとることは現状としては不適当と思ったからであり，相対ホモロジーは $\varphi$-射影（移入）性などに一寸姿を出すだけにとどめた． 従って Adamson

[2] における群の相対ホモロジー，中山 [35]，Rosenberg-Zelinsky [39] における単純環，原始環のそれもすべて省略した．

再び論及した方のことにもどれば，§26 に Chevalley-Eilenberg [9]，Koszul [29] のリー環のコホモロジー論の一部を紹介したので，松島教授の本講座「リー環論」と相俟って読まれたい．ただし上述のように相対コホモロジーは論じなかった．さらに全般を通じ，ごく細かいことだが射影，移入次元の基本性質 (6.4)，(6.5) の直接証明を与えたり，拡大のことを標準複体について説明したり，スペクトル列に関する諸群をむしろ従来の与え方によって述べたり，他方いわゆる satellite の理論は省略して直接にホモロジーに移ったりしたのなど，いずれも読者の便を思ったのであり，おそらく歓迎していただけると思う．しかし，上述の諸事項やこれらの諸点を除き，全般的には Cartan-Eilenberg [$7_0$] の体系に忠実であることに努めた．それは敢えて異をたてる必要はないし，また同書の用語や記号で書かれている最近の多くの論文の閲読に読者が不便を感じられないようにと思ったからでもある．

ホモロジー論は近年代数的整数論と代数幾何学に著しい成果をあげた．すなわち，前者ではすべてのガロア拡大を通じてイデール類群に基本 2 次元コホモロジー類を見出すことにより高木-アルティン類体論の相互律を精密化すると共にその非アーベル拡大に対する影響力を深め，さらにイデール類群，数群におけるすべての次元のコホモロジー群が一斉に決定された．同時に類体論の証明の再編成も行われた．これについては，幸い本講座には上記の河田教授のすぐれた講述がある．他方，後者においてはベクトル・バンドルの Euler-Poincaré 指標と Chern 類の関連において把える小平-Spencer-Serre-Hirzebruch の代数多様体のみごとな $R$-$R$-定理が得られた．本稿でもせめて層のコホモロジーを述べて，この方面への入門の便としようと思ったのだが，果たせなかったので，秋月教授の「調和積分論」によって見られたく，本講座の小松教授の講述においても論ぜられることと期待する．位相幾何学全般における意義を同講で見られたいのはいうまでもない．そのような応用（というよりそれこそ本質であるが）を念頭にもちつつ，しかし代数学の一分科とし

て形成されたホモロジー代数学の内部の問題に一応限定して，それをなるべく内容的に，かつ最近の進展を紹介しつつ記述しようとしたのが小稿であるが，頁数や時間の制約もあり意図のごく一部しか果たせなかったのを残念に思う.

終りに，未発表の原稿や書信の自由な使用を快諾された Eilenberg, Rosenberg, zelinsky，原稿の整備や校正に協力してくださった小野孝，服部リウ，水谷明，都筑俊郎，都筑睦の方々に深く感謝の意を表します.

1957年4月

著者の饒舌なる一人記す