

序

本書は、ある意味で娯楽と仕事を一つにしたいという願望に端を発した、パズルと数学に対する入り混じった興味から生まれました。本書は、数学を遊び、パズルを勉強することに邁進します。特に、数理モデル化の視点から、さまざまなパズルやゲームを研究するための抽象代数を展開します。ルービックキューブ、ライツアウトおよびそのほかのパズルの背後にある数学を理解するのに必要な抽象代数はすべて取り入れています。もし冒頭に引用したフォン・ノイマンの言葉を信じてもらえるなら、本書で紹介している数学を楽しみながら慣れ親しむことができるでしょう。

数学者ではない人々の娯楽のために作られたこれらのパズルが、なぜ数学を用いてこれほどうまく記述できるのでしょうか。私は、私たちの体験の多くの側面が文化的境界を越えて普遍的であるからだろうと考えます。本書で取り扱うルービックキューブやライツアウトなどのパズルは、この意味で普遍的といえるでしょう。これらのパズルをうまくモデル化できるのは、数学がさまざまな普遍的分析手段を提供しているからだと考えます。

本書は、離散数学および群論を教えることを目的とした講義録から始まりました。この講義は、これらの題材を学ぶ能力はあるものの、それらに含まれる抽象的概念を習得するのに必要な長期的指針よりも日々の生活での差し迫った雑事に悩まされている学生を対象としています。ルービックキューブのように非常に魅力的な対象で彼らを惹き付けるという私の作戦は成功し、学生は喜んで勉強するようになりました。かなり広い範囲の人々から意見や感想をもらえたことで、この講義録を楽しんだのは私の学生だけではないことがわかりました。そこで、私はさまざまな背景をもつ人々にも興味をもってもらえる本を書いてみようと考えました。しかし、私は同時にこの本を参考文献としても役立つものにしようと考えました。

本書の執筆は、すみずみまで楽しめたという意味で真の奉仕活動でした。読者も本書から何らかの楽しみを引き出してもらえることを期待します。

私は、できる限り誤記をなくすように努めました。もしその類を見つけたら、将来の改訂の際に修正できるよう教えていただけると助かります。連絡先は wjjoyner@gmail.com です。

前述のような普遍的な主題を継続していくために、本書の収益の半分は、自由に利用することができるオープンソースソフトウェアとして開発された計算機代数システム **SAGE** (<http://www.sagemath.org/>) の支援に直接充てられます。**SAGE** は Linux, MacOS, Windows といった主要なプラットフォームにインストールできますが、Firefox などの Web ブラウザを用いてインターネット上で自由に利用することもできます。収益の残りの半分は、全世界で環境プロジェクトに取り組む非営利組織 EII (Earth Island Institute <http://www.earthisland.org/> を参照のこと) に直接渡ります^[訳註 2]。EII の創設者デビッド・ブラウワー (1912–2000) の言葉を借りれば、海は一つ、空気は一つ、地球は一つ、そして代わりはないのです。

第 2 版への序

本書の初版が、それを愛読してくれたパズル愛好家および数学者に受け入れられたことに感謝します。そして、彼らからの多数の親切な電子メールによって励まされました。彼らからも示唆されたように、私は本書の改訂版を発刊する時が到来したと考えます。演習にも使えるようにという多数の要望に対して、自由に利用できる計算機代数ソフトウェアである **SAGE** を用いて抽象概念を例示する教材を取り入れました。また、初版で見つかった表記的、歴史のおよび数学的誤りを更新または修正しました。私が受け取った意見を反映したこの改訂版は、初版の読者に歓迎してもらえると信じています。私が本書を楽しんで書いたように、本書を始めて読む人も楽しんでいただけることを期待します。

[訳註 2] 邦訳版権の収益も、同じくこれらのプロジェクトに充てられるとのこと。

謝 辞

本書は、ドイツ・ボーフムのルール大学数学科のクリストフ・バンデロー教授およびロンドンのサウスバンク大学計算情報システム・数学科のデビッド・シングマスター教授のすばらしい本 [B1] [Si] に大きく負っています。ジョンズ・ホプキンス大学出版局の敏腕編集者トレバー・リップスカムの励ましと多くのすばらしい助言に感謝します。アイデアの源泉としてこれらなしには、本書は存在しなかったでしょう。本書は、多くの人々からの刺激となる議論、励ましのメールおよび共同作業に多大な恩恵を受けました。これには次の人々を含みます。(括弧内は執筆を支援してくれた部分です。) クリストフ・バンデロー、ダン・ホエイ、アン・キャセイ (旧姓ルアース)(13.4 節, 13.3 節および第 14 章の一部), マイケル・ダンバー (13.3 節), マーク・ロングリッジ, ジム・マクシー (7.4 節および 13.5 節), ジャスティン・モンターギュと G. ゴメス (15.4.2 節および 13.2 節), マイケル・レイド, アンディ・サザーン (15.3 節), デニス・スペルマン (10.5.1 節), ハーバート・コシエンバ (15.2.3 節), (後で述べる)SAGE 開発チームのたくさんの人々, そしてその他の多数の方々。

本書で示したグラフの一部は、SAGE [S] の助けを借りて描画しました。群論的計算の一部は、GAP [Gap] および SAGE の助けを借りて計算しました。本書にあげた参考文献の情報の一部は、すばらしいインターネットサイトであるマックチューター数学史保管庫 [MT] から拝借しました。

本文中に登場するルービックキューブ、ピラミンクス、メガミンクス、マスターボール、ライツアウトおよびその他のパズルの名称はすべて商標です。読みやすさを考慮して、それぞれの名称に対する (TM) の表記は省略しました。ライツアウトを販売するハスプロ・トイ社には、その商品に関して調べる機会を与えてもらったことに感謝します。

SAGE に対するクレジット : SAGE は中心的な開発者であるウィリアム・ステインにより 2005 年に開発が始まりました。SAGE はオープンソースで、インターネットに接続できる人なら誰でも無料でダウンロードしてインストールする

ことができます。本書の例にあるコマンド行インタフェースは、フェルナンド・ベレッツが開発を始めた Ipython [Ip] を使っています。多くの人々は、トム・ブースビーとウィリアム・ステインが初期のバージョンを作成した GUI ノートブックインタフェースのほうがお好みでしょう。本書で使った多くのコマンドは、**SAGE** をダウンロードしてインストールする版だけでなく、インストールしないでオンラインで実行して試みるすることができます。すべての群論的構成要素については、**SAGE** は 1980 年代半ばに開発が始まった群論に特化した計算機代数システム GAP のインタフェースを使っています。第 7 章で示したグラフ関連については、グラフパッケージ NetworkX [N] およびエミリー・カークマンとロバート・ミラーが初期のバージョンを作成した機能を使っています。ポビー・モレットイとロバート・ミラーは、ケーリーグラフを構成する **SAGE** の機能を作成しました。一方 GAP の GRAPH パッケージは、レオナルド・ソイチャーが作成したたものです [So]。ルービックキューブを描画し操作する **SAGE** のコードは、(トム・ブースビーにいくつかの下回りの描画関数を作成してもらって) ロバート・ブラッドショー、ロバート・ミラーおよび私が作成したものです。

SAGE の開発のかなりの部分は、**SAGE** の中心的な開発者であり設計者でもあるウィリアム・ステインの数論研究に対する米国国立科学財団の補助金によってまかなわれています。ウィリアム・ステインが所属するワシントン大学もまた、さまざまな支援をしてくれました。すばらしいソフトウェアを開発したウィリアム・ステインおよび **SAGE** 開発チーム全員に感謝の意を表します。

第 2 版は次の方々による注意深い熟読の結果でもあります。ジェイミー・アダムス、ルイス・ノウィッツ、デビッド・ヨード、ロジャー・ジョンソン、ジャープ・シャーフィス、マイケル・ホイ、トム・デイビス、ジョン・ルード、トレバー・アーウィン、ステファン・レップ、マーク・エドワーズ、カール・バターソン、ペーター・ニューマン、ビル・ゼノ、ハーバート・コシエンバ、アラステア・ファルジア、マシュー・ルイス、クリストファー・ポール・タフレー、ロバート・ブラッドショー、ベンジャミン・ウェジェンマン、彼ら全員に感謝します。

最後に、そしてもっとも大切なこととして、ここに書き表わすだけでは足りませんが、すばらしい妻エルバに感謝します。

はじめに

個人的には、あることがまったく別のことと意外な関連があるのを発見するのに興味をかき立てられます。ルービックキューブは、(解法戦略を必要としない) 純粋に数学だけを使った比較的効率のよい解法が存在する機械式パズルとして、まったくぴったりの例です。その意外な関連をどこから説明し始めるのがいいのか難しいのですが、ウッドハウスの登場人物であるパーティ・ウスターが言うように、「あなたが同じ経験をしているかどうかはわかりません。しかし、私が話をするときには直面するのは、どこから話し始めればよいかという絶望的に難しい問題なんです。」では、ルービック自身の話から始めることにしましょう。

エルノー・ルービックは、第2次世界大戦のさなかにブダペスト病院の防空壕で生まれました。彼の母親は詩人で、彼の父親はグライダーを製造する会社を興した航空機の技術者でした。ルービック自身は、決して数学者ではなく、工芸技術デザインアカデミーで建築とデザインを学び、そこで教授として内装デザインを教えていました。1970年代半ば、彼は、以降世界中の何百万という人々の興味をかき立てる立方体状の機械式パズルの特許を取得しました。ルービックキューブの誕生です。1982年には「ルービックキューブ」は誰にも馴染みの言葉となっていて、オックスフォード英語辞典にも収録されました。世界中で、1億個以上のルービックキューブが販売されました。

これより遡ること約150年、1820年代末から1830年代初めにかけて、エヴァーリスト・ガロアというフランスの若者が新しい数学の分野を開拓しました。多項式の可解性を解明しようとする彼の試みから、群論が生まれたのです。高校生は

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

が2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解となることを学びます。同様に、3次方程式および4次方程式についても、もっと複雑な公式が中世に発見されています。(詳細については、たとえば [JKT] を参照してください。) ガロアの群論における業

績は、5次およびそれ以上の次数の方程式についても、その係数と根号だけを含む同様の代数的な公式が存在するかという、当時の数学の重要な未解決問題に端を発しています。この問題は、最先端の数学者の努力にもかかわらず、何世紀の間未解決のままでした。ガロアは、これまで誰も解けなかったこの問題をみごとに解決しました。(もちろん、ルフィニおよびアーベルも同様に賞賛されるべきではありますが。)ガロアの生涯もまた興味深いですが、彼については後ほど述べることにします。(たとえば、[Ca]や[Ro]を参照してください。)

群によって、対称性を推し量ることができます。(たとえばガロアは、今日ガロア群と呼ばれる多項式の根の対称群を研究しました。)数学者ヘルマン・ワイルが彼のすばらしい著書[We]で述べているように、対称性は「各世紀を通じて、人びとは、この観念によって、秩序と美と完璧さを理解し、また創造しようとしてきた^[訳註 3]」結果なのです。とくに多項式の根、結晶学、素粒子物理学、鳴鐘術(第3章を参照のこと)、暗号学、そしてルービックキューブの研究において、群は中心的な役割を担います。驚くべきことに、群論を用いて(解法戦略や特別な手順の知識なしに、ルービックキューブの群論的定義だけで)ルービックキューブを解くことができます。(10.2節を参照してください。)

本書は、群論の基礎から始めて、ルービックキューブ系パズルの群論的モデルを構築します。実用面では、ルービックキューブの解法戦略も少し詳細に検討します。(解法戦略をすぐに見たいのであれば、15.1節を参照してください。)同様に、15パズル、ルービック4面体(ピラミックス)、ルービック20面体(メガミンクス)、スキューブ、ホッケーパックおよびマスターボールといったルービックキューブに類似したパズルの解法戦略も簡単に論じます。

しかしながら、忘れてはならない重要な点は、群論は実世界で幅広く応用できる強力な道具だということです。パズルの解法は、その中の一つにすぎません。本書ではルービックキューブに焦点を当てているために、他の教科書と比べて、群論への取り組み方が次の点で異なります。

- (a) 比較的初歩的ではあるけれども標準的ではない群論の話題を多数含んでいます。
- (b) (シローの理論などの)一般的な理論の例を使った置換群に重点を置いています。
- (c) ([Bu]にあるような)アルゴリズムに関するいくつかの基本的な概念を紹介

[訳註 3] 遠山啓訳、『シンメトリー』(紀伊國屋書店、1970)より引用。

します。

- (d) 数学者およびパズル愛好家の両方の視点から興味深い題材を選んでいますが、題材の水準はできる限りやさしくするようにしました。

さらに、ほとんどの群論の教科書では、そこで述べている事項をすべて証明していますが、本書は多くの記述に証明を与えているものの、場合によってはヒントのみのこともあります。また、証明の概略だけを述べて証明は興味ある読者に委ねることもありますし、ある記述については例を示すにとどめています。証明を与えない場合には、証明を含む参考文献を提示します。どの部分が証明であるのかをわかりやすくするために、証明は「証明：」で始まり「□」で終わるようにしました。a.b 節で述べる結果および例に対して、a.b.c の形式で番号付けをしました。

第 1 章から第 3 章までは、基本的な数学的背景を提示します。第 4 章では、いくつかのパズルと、それらに対して用いる表記法を紹介します。第 15 章の解法を除く残りの章は、群論、グラフ理論、線形代数およびオートマトン (有限状態機械) 理論を用いて、これらのパズルを調べていきます。本書の前半は優秀な高校生であれば理解できますが、第 12 章および第 14 章は比較的高度な内容となっています。しかし、個人的にはこれらの章がもっとも興味深く、ルービックキューブが数学のさまざまな分野と注目すべき関連があることを示しています。これが、私のこの主題に対する途切れることのない興味の源となっているのです。

最後の第 16 章は、本書では深く論じていない、あるいは少なくとも私自身が現時点で不案内な分野での方向性を示します。そこでは、私が答えをもち合わせていないいくつかの問題と質問を挙げるにとどめて、これを完成させるつもりはありません。

教材として使う場合の注記：米国海軍兵学校 (USNA) で教鞭をとった経験に基づくと、本書を教科書にした半年の講義では、脇道に逸れたり他の教材について十分時間をかけたりしながら、第 9 章のキューブ理論の第 1 基本定理を目指すのが適当でしょう。第 11 章のキューブ理論の第 2 基本定理までを半年の範囲に含めるには、かなり急がなければなりません。たとえば、マーリンの機械に関する第 6 章などは講義の範囲からはずして課題として出題する、といったことが必要になります。

SAGE について：この改訂版では **SAGE** を使用した例題を多数追加しました。**SAGE** は、自由に利用できるオープンソースソフトウェアとして開発された計算機代数システムです。**SAGE** の Web サイト www.sagemath.org には豊富な資料(リファレンスマニュアル, チュートリアル, 電子メールによる支援の一覧など)がありますが, ここでは本書でどのように **SAGE** を用いているかを説明しておきます。まず, 本書を読むのに **SAGE** のことを知らなくてもよいし, 気にしなくてもかまいません。その場合, **SAGE** と書かれた囲み部分を読み飛ばして結構です。一方, 読者が計算機ソフトウェアに十分馴染みがあるのなら, **SAGE** の例題は, その説明の理解を助ける, より対話的方法を提供します。**SAGE** には, 広く使われている 2 通りの使用方法があります。一つはキーボードからコマンドを入力し, **Enter** キーを押すと結果が出力されるコマンド行インタフェースです。もう一つは, 「セル」にコマンドを入力し, **Shift-Enter** を押すと結果が出力されるグラフィカルな「ノートブック」インタフェースです。本書のほとんどの例は, 私の好みから, コマンド行インタフェースを使用したものとなっています。また **SAGE** はグラフや図をカラーで出力しますが, 本書では出版費用を抑えるためにグレースケールで載録しています。