# はじめに

代数的微分方程式とは，例えば微分方程式

$$F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \quad (\,' = d/dx)$$

のことをいう．ただし，$F$ は $y, y', \ldots, y^{(n)}$ の多項式であり，係数は $x$ の関数である．この微分方程式の解を代数的に考察するために加減乗除の他に微分演算 $d/dx$ について閉じた体，微分体を用いる．

筆者はこれまで超越数論を研究してきたが，その際に関数の超越性や代数的独立性が必要となる．関数は微分方程式や差分方程式をみたしていることが多く，微分体や差分体を使って関数の超越性や代数的独立性が示される様子に大変興味を抱いてきた．

この分野の文献では西岡啓二による「代数的微分方程式の一般解」があるが，これを読むには基礎的な知識が必要となり，専門でない者には読みにくい．また英語による文献には誤りが多く，初学者には読破しがたい．適当な本も見当たらないことから門外漢であることを省みず，微分体の基礎知識から始め，まとめてみようと決意した次第である．

本書で取り上げるべき内容，とくに第 6，7 章の内容の選択については西岡啓二の示唆によるところが大きい．また上述の西岡啓二による著書の内容はほぼ含んでいる．

第 5 章は標数 0 の 1 変数代数関数体の理論の速習にもなる．

読者は大学の数学科における 3 年生までの知識，具体的には群，環，体，ガロワ理論を学んでいれば理解できるように心がけた．

以下，各章の内容について説明しよう．

第 1 章は基礎的な事柄の準備である．超越次数，線形無関連，代数的無関連，付値環などについて説明した後，微分環，微分多項式環，微分多項式の割り算，微分イデアルの素因子分解について述べた．

第 2 章は微分体の万有拡大の存在証明が目標である．万有拡大の存在は Kolchin により証明されたが，ここでは Ritt のレゾルベントを使って素イデアルを係数拡大したイデアルの素因子分解を得た後，証明した．超越次数などを使うことにより証明は見通しのよいものになったと思うが，かなり長いので結果だけを認めて先に進んでもよい．

第 3 章では第 4 章の Picard-Vessiot 拡大で必要となる線形代数群の知識についてまとめた．

第 4 章は Picard-Vessiot 拡大，強正規拡大の解説である．強正規拡大のガロワ理論については，おおむね Kolchin の論文に沿って説明したが，論文には証明に少しあいまいな部分があり，また彼の著書では万有拡大体の定数をすべて付け加えた体上でのガロワ理論しか扱っていない．しかし万有拡大体の定数をすべて付け加えるのでは体があまりに大きくなりすぎると思う．ここでは定数を付け加えないでガロワ理論を展開した．

第 5 章では第 6, 7 章で使う 1 変数代数関数体の理論を解説した．基礎体を標数 0 の代数閉体に限ることにより簡潔になっていると思う．留数定理，Riemann-Roch の定理，Weierstrass 点などを扱っている．Weierstrass 点を使って，種数が 2 以上の 1 変数代数関数体の自己同型が有限個しかないことも証明した．

第 6 章では微分方程式の既約性，解の超越性や代数的独立性について論じる．微分付値型拡大という概念を導入することにより，Kaplansky や Rosenlicht により得られていた結果を統一的に扱った．西岡啓二による Painelevé 方程式の既約性の証明も紹介している．岡本和夫の最近の著書「パンルヴェ方程式」に既約性の証明の歴史的経過について詳しい解説がある．他に Airy 関数と Bessel 関数の代数的独立性も証明した．これは新しい結果である．

第 7 章では最初に超越数論における Schanuel 予想の関数体版の Ax による証明を紹介した．次に $\exp x^2$ の原始関数が初等関数では表せないことの証明,

Fuchs 拡大の決定，Fuchs 拡大と任意定数に有理的に依存する拡大が同値であることの証明を与えた．

西岡久美子